

Et historisk blæseinstruments resonansfrekvenser

Tore A Skogberg
Danmarks Tekniske Universitet
2006

Oversigt

En kopi af et musikinstrument fra middelalderen undersøges for bestemmelse af relationen mellem de naturlige resonanser i instrumentet og den toneskala der spilles efter. Resonanserne søges dels bestemt gennem løsning af bølgeligningen for simplificerede modeller af instrumentet og dels gennem måling på instrumentet. Rapporten introducerer de skalaer som instrumentet kan forventes at have spillet efter og de fundne resonanser sammenlignes med disse skalaer.

1 Forord

I dette studie analyseres de naturlige resonanser i det historiske musikinstrument kaldet en *Zink*, der ofte beskrives som en trompet af træ. Instrumentet består af et konisk rør med et mundstykke i den smalle ende og fingerhuller som på en blokfløjte. I modsætning til blokfløjten, hvor tonehøjden i et stort omfang er givet ved fingersætningen alene, er det vanskeligt at ramme tonen præcist på zinken; der er derfor brug for ganske megen intonation af hver enkelt tone for at spille rent.

Anledningen til at foretage dette studie skyldes et ønske om at analysere baggrunden for:

1. At et instrument, der er næsten cylindrisk, kan gå i resonans på de lige harmoniske af grundtonen.
2. At den anden harmoniske kan være højere end to gange grundtonen.
3. At instrumentet er svært at spille rent på.

Projektet søger derfor efter en sammenhæng mellem de naturlige resonanser i zinken og tonerne i den musikalske skala der spilles efter. Da zinken var populær på et tidspunkt hvor den moderne dur/molskala ikke var kendt, gives desuden en introduktion, i kapitel 2, til de musikalske skalaer instrumentet forventes at have spillet efter. Dette introducerende afsnit er skrevet inden projektets start.

Som led i analysen bliver bølgeligningen opstillet for to forskellige matematiske modeller af instrumentet og resultatet sammenlignes med målinger på instrumentet.

Studiet er gennemført som et projekt med vægten 5 ECTS point, ved Danmarks Tekniske Universitet, Lyngby, januar 2006, under vejledning af Finn Jacobsen.

Tore A. Skogberg, 2006.

1	FORORD	2
2	INTRODUKTION	5
2.1	Fremstilling	5
2.2	Historie	5
2.3	Instrumentfamilien	6
2.4	Tonehøjde	7
2.5	Tonedannelsen	7
2.6	Musikalsk skala	8
2.6.1	Baggrund	8
2.6.2	Den ligesvævende skala	9
2.6.3	Rene intervaller	10
2.6.4	Den diatoniske skala	11
2.6.5	Den kromatiske skala	11
2.6.6	Den Pythagorenske stemning	12
2.6.7	Middeltone (1/4 komma)	13
2.6.8	Middeltone (1/5 komma)	14
2.6.9	Valotti stemningen	16
2.6.10	Sammenfatning	17
3	MÅLING	19
3.1	Målskitse	19
3.1.1	Diametervariation	20
3.1.2	Fingerhuller	21
3.2	Måleopstilling	22
3.2.1	Mundstykke	23
3.2.2	Mikrofon	24
3.2.3	Mikrofonboks	25
3.2.4	Højttaler	26
3.3	Måleserier	28
3.3.1	Måleserie 1 – Afstand fra ende	28
3.3.2	Måleserie 2 – Højttaler ved ende	28
3.3.3	Måleserie 3 – Højttaler ved side	30
3.3.4	Måleserie 4 – Amplitude ved -3, -6 og -10 dB	33
3.3.5	Måleserie 5 - Fritfelt	35
3.3.6	Måleserie 6 – PU-probe	36
3.4	Naturlige resonanser	39
3.5	Interpolation	41
3.5.1	Teori	42
3.5.2	Fast amplitude	43
3.5.3	Variabel amplitude	44
4	TEORI	46

4.1	Baggrund	46
4.1.1	Bølgeligningen	46
4.1.2	Lydtryk	47
4.1.3	Partikkelhastighed	48
4.1.4	Impedans	48
4.1.5	Cylindrisk resonansdel	49
4.2	Cylindrisk model	50
4.2.1	Bølgeligningen	50
4.2.2	Randværdier	51
4.2.3	Løsning af ligningen	51
4.2.4	Konstanterne c_1 og c_2	52
4.2.5	Bestemmelse af k	53
4.2.6	Trykkets fordeling	53
4.3	Konisk model	54
4.3.1	Bølgeligningen	54
4.3.2	Randværdier	55
4.3.3	Løsning af ligningen	55
4.3.4	Konstanterne c_1 og c_2	56
4.3.5	Bestemmelse af k	57
4.3.6	Trykket i røret	58
4.3.7	Andre åbningsvinkler	59
4.3.8	Justering af modellen	61
4.4	Konisk model med endekorrektion	62
4.4.1	Strålingsimpedans	62
4.4.2	Bølgeligningen	62
4.4.3	Bestemmelse af k	65
4.5	Klangfarve	66
5	APPENDIKS	69
5.1	Frekvensopløsning	69
5.2	Harmoniske overtoner	70
6	REFERENCER	71

2 Introduktion

Dette kapitel et kort rids over instrumentets fremstilling og historie samt gennemgår baggrunden for de skalaer det må forventes, at have spillet efter. Skalaerne skal danne den nødvendige baggrund som reference for vurdering af instrumentets skala.

2.1 Fremstilling

Zinken er bygget af et stykke hårdt træ, i dette tilfælde en gren af buksbom, der deles i to stykker som udhules og limes sammen igen til et let buet rør. Som regel omvikles det med sortbejdset læder af praktiske og æstetiske årsager.



Figur 1 – Zinken dannes af en gren af hårdt træ, som flækkes, udhules og limes sammen. En omvikling med læder har til formål at tætne instrumentet overfor mindre revner, at styrke det idet middelalderens lim var svag, at forhindre fingrene i at glide og det har desuden en æstetisk funktion. Resonansdelen er konisk og svagt buet for at lette grebet.

Et drejet mundstykke af ben eller horn skydes ind i den smalle ende af røret, der ofte forstærkes med en ring af messing, for at kunne modstå presset uden overbelastning af den limede samling; limen var ikke så stærk i middelalderen.



Figur 2 – Zinken spilles som en trompet med et lille mundstykke der skydes ind i den smalle del af instrumentet og tonehøjden afstemmes med fingrene efter samme princip som en blokfløjte.

Mundstykkets rør omvikles med snor for at tætne forbindelsen til selve zinken. Der er mulighed for at justere mundstykkets position ved at ændre på omviklingen, så mundstykket skydes mere eller mindre ind i instrumentet. Det er kun muligt at sænke stemningen, og der kan kun hentes cirka 1 %, så de færreste zinkspillere benytter i praksis denne mulighed.

2.2 Historie

Instrumentet kaldes for en *Zink* i den germanske sprogstamme og for *Cornetto* på engelsk og italiensk. I den moderne instrumentopdeling tilhører zinken familien af messinginstrumenter idet det blæses på samme måde som fx trompeten. Oprindelsen til navnet er ukendt.

Zinken dukker frem i middelalderen (cirka år 400 til 1400) og fremstår omkring 1450 i sin nuværende form. Det var et meget udbredt instrument i kirken, i hoffets orkestre og blandt

stadens musikere. Instrumentets popularitet toppede i renæssancen (cirka 1500 til 1600), og varede et godt stykke ind i barokken (cirka 1600 til 1750) hvor den dog måtte se sig slået af de nye instrumenter; oboen og violinen. De havde en klang som var mere rig på overtoner og dermed passede bedre med barokkens og den efterfølgende Wienerklassiks klanglige idealer. Der var dog tradition i Tyskland for tårnblæsning med zink og basuner langt ind i 1800-tallet.

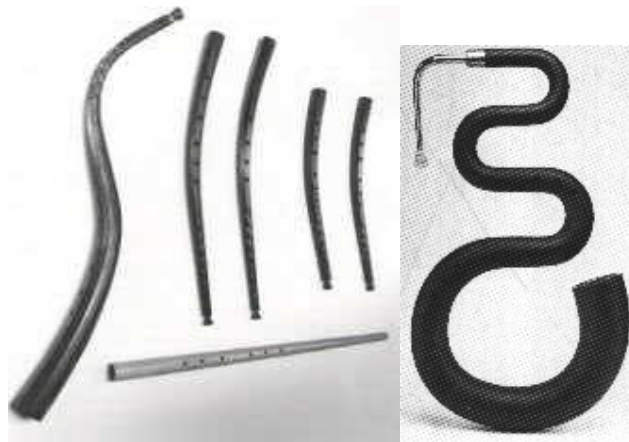
Der er kun få vidnesbyrd om instrumentets brug i middelalderen, men vi ved, fra blandt andet lønningslister, at zinkspillere var hoffets højeste lønnede musikere. Der var krav fra den tids musikerforbund, lavsvæsenet, om at stadsmusikeren skulle kunne spille zink, og vi ved fra boopgørelser at zinken var meget udbredt blandt disse musikere. Også klostrene uddannede zinkspillere; de udvalgte unge mænd startede på uddannelsen når deres stemme gik i overgang og de derfor ikke kunne tjene til livets oprethold som kirkesangere. Musikuddannelsen varede 12 år, så det er dygtige musikere der blev uddannet.

I renæssancen blev zinken meget anvendt som støtte ved korsang, samt ved instrumentalspil hvor improvisation over en stemme var meget udbredt. Der er desuden overleveret mange bøger fra renæssancen med stemmer for zink og basun, ikke mindst bøger fra det danske hof.

I barokken blev zinken benyttet solistisk i samspil med blandt andet obo og violin.

2.3 Instrumentfamilien

Zinken er et diskantinstrument der spiller i samme leje som en kvindestemme; mere præcist fra tonen A på 220 Hz og omkring 2½ oktav op. Grebene minder om en blokfløjte stemt i G, dog uden lillefingerens hul. Det er muligt at sænke den dybeste tone en stor sekund ved at slappe af i læberne, hvorimod den øverste tone kun afhænger af musikerens styrke i mellemgulvet og af læbernes udholdenhed.



Figur 3 – Eksempler på zinker. Fra venstre Lysarden, 2 zinker, 2 diskantzinker og nedernst en stille zink. Til højre en serpent. Fra <http://www.e-m-s.com/cat/brass/brass/cornetti.htm>.

Der findes en række andre instrumenter i zinkfamilien, hvor de mest kendte er tenoren *lysarden*, der klinger en kvint lavere (greb i C), og bassen *serpente*, der klinger en oktav lavere end tenoren og som har sit navn fra sit slangeligende udseende.

Mindre kendte er *altzinken*, der er en tone dybere end zinken (greb i F), men som har en mørkere tone på grund af en større diameter, og *diskant-zinken*, der ligger en kvint højere end zinken (greb i D). Der findes dertil zinker hvor mundstykket er en integreret del af

instrumentet. De er fremstillet af ét stykke træ, hvor det koniske rør bores ud, de har greb i F og kaldes, af ukendte årsager, for *stille zink*.

2.4 Tonehøjde

Alle kendte zinker er stemt enten med A i omegnen af 440 Hz (kammertonen) eller en sekund højere med A omkring 465 Hz. Der er ikke overleveret zinker i lav stemning med A omkring 415 Hz, selv om zinker vides at have spillet med gamber i lav stemning – musikerne må derfor have transponeret musikken, mest sandsynligt fra en zink i høj stemning. En populær stemning i Wienerklassikken (ca. 1770) var 430 Hz.

I det hele taget har kammertonen ikke været stabil gennem historien; den har været angivet lokalt af de toneangivende instrumentmagere i de større byer. Første gang kammertonen fastlægges officielt er ved en kongres i Wien omkring 1870, til 435 Hz. Siden er den steget og den blev omkring 1930 fastlagt til 440 Hz, selv om flere orkestre i dag angives at spille nogle få hertz højere.

Den zink der undersøges i denne rapport er en kopi af et instrument fra 1600-tallet og det oplyses af instrumentmageren (*Christopher Monk*, England), at den er stemt med A i 440 Hz.

2.5 Tonedannelsen

Lyden genereres ved *embouchure*, hvor læberne presses sammen imod mundstykket og et relativt stort lufttryk kortvarigt åbner for læberne, så luften sendes ind i instrumentet i pulser. Pulsfrekvensen bestemmer musikeren ved at justere stramningen af læberne, og lyden ”forstærkes” af røret, dels ved at virke som en impedanstilpasning til luftmediet, og dels ved at der anslås en resonans i røret så musikerens pulsstrøm fra læberne udnyttes mere optimalt.

Instrumentets 600 mm lange rør ligner i en vis grad klarinettens cylindriske boring, så det er fristende at beskrive resonansen i røret som en kvartbølgeresonans, men frekvensen, der skal være omkring 220 Hz, bliver 35 % for lav ved denne model. Der er følgelig behov for en mere dybtgående analyse, men først skal der skabes et fundament for vurdering af zinken som musikinstrument.

2.6 Musikalsk skala

Zinken har været i brug i et langt tidsrum hvor skiftende krav til skalaer har medvirket til en udvikling af instrumentet. En vurdering af instrumentets spillemæssige egenskaber må derfor tage udgangspunkt i flere forskellige skalaer for at kunne repræsentere de skiftende krav gennem tiderne. Af praktiske årsager vil den stemning, som ligger til grund for *dur* og *mol* skalaerne blive introduceret først, og derefter behandles et lille udvalg af de øvrige skalaer.

Som afslutning formuleres det sæt af krav, som analysen tager sit udgangspunkt i.

Et kendskab til musikkens terminologi er ikke en forudsætning for at kunne følge med i dette afsnit – begreberne vil blive introduceret efterhånden som de behøves.

2.6.1 Baggrund

Zinken har været i brug siden middelalderen og de i dag enerådende skalaer, *dur* og *mol*, var ikke aktive den gang – de dukker op i løbet af 1700-tallet, som et resultat af barokkens og Wienerklassikkens eksperimenter med melodi og harmonik.

I middelalderen var de syv *kirketonale* skalaer referencematerialet, som i det store og hele benyttede rene intervaller. Skalaerne blev benyttet ved enstemmig sang, og siden 1000-tallet også ved flerstemmig sang. Det lange udviklingsforløb påvirker gradvist materialet, for eksempel ved at introducere nye toner for at kunne skifte mellem skalaerne efterhånden som behovet opstår, og desuden for at understrege den musikalske virkning, for eksempel ved bestemte musikalske mønstre ved afslutning af musikalske fraser (kadencer). Det vides at zinken, sammen med basuner, har ledsaget sangerne, så musikerne har været nødt til at intonere efter sangerne.

Som det vil fremgå af de følgende afsnit, kan en skala ikke tilbyde rene intervaller mellem alle tonerne, systemet går ganske enkelt ikke op, så der må indgås kompromisser for at skalaen kan fungere i praksis. Ved sang og instrumentalspil er det muligt at variere lidt på tonens frekvens (intonere) for at få intervallerne til at klinge rent, men dette er ikke muligt på tastaturinstrumenterne som cembalo og orgel, der omkring 1300-tallet er på et niveau som svarer til nutidens instrumenter. Spil på instrumenter med fast stemning af tonerne kræver en løsning på problemet med stemning efter forskellige skalaer.

Omkring 1450 findes referencer til stemning af cembalo efter en kvintbaseret skala, den såkaldte *Pythagorenske* stemning, som tilbød næsten rene intervaller i et snævert område, og denne skala skal omtales, da zinken givetvis har spillet sammen med disse instrumenter.

I renæssancen er *middeltone* stemningen central, den var både vellydende og samtidig så fleksibel, at den blev benyttet langt op i barokken. Ligesom den Pythagorenske stemning kan stemningen varieres efter behov. Hvilken variation der blev foretrukket af musikerne, kan holde forskere i musikhistorie beskæftiget i meget lang tid, så der træffes et par valg i det pågældende afsnit for at definere nogle skalamæssige referencer.

I barokken er *Valotti* stemningen et godt bud på hvordan samtiden taklede problemet, som det voksende krav om at kunne spille i alle tonearter, nødvendigvis måtte introducere. Stemningen leder desuden frem til den i dag eneherkende skala; den ligesvævende stemning, hvor forskellen mellem tonearterne er visket ud – alle kvinter er stemt ens og alle tertser er stemt ens, så det er, ud fra et klangligt, harmonisk synspunkt, lige meget om et stykke spilles i C-dur eller H-dur.

2.6.2 Den ligesvævende skala

Den i dag altdominerende stemning kaldes for den *ligesvævende* skala, på engelsk: *the even tempered scale*, og er karakteriseret ved, at alle tolv tonetrin har samme relative størrelse. Da oktaven svarer til et frekvensforhold på 2, vil hvert enkelt tonetrin modsvare den tolvte rod af 2, cirka 1,0595. Et tonetrin, en *lille sekund*, er derfor på cirka 6 %.

Frekvensen af en tone i n trins afstand fra en reference f_0 , er:

$$f_n = 2^{n/12} \cdot f_0$$

Referencen kan være en vilkårlig tone i skalaen, og tonetrinnet n antager positive værdier for toner over referencen og negative værdier for toner under referencen. For $f_0 = 440$ Hz, dvs. *kammertonen* (tonen A), er tonen C, der ligger tre tonetrin over A, givet ved 523,25 Hz.

For at angive hvor meget en tone afviger fra skalaens trin, benyttes i musikerverdenen en *centskala*; en målestok defineret ved en (logaritmisk) inddeling af halvtonen, der fastsættes til 100 cent, hvorved oktaven bliver på 1200 cent. Ligningen bliver nu: $f_C = f_0 \cdot 2^{C/1200}$ hvorved en tone f_C , målt overfor referencen f_0 , bliver:

$$C = \frac{1200}{\log_{10}(2)} \cdot \log_{10}\left(\frac{f_C}{f_0}\right)$$

For en skala med udgangspunkt i tonen C bliver værdien for tonen C# på 100 cent, for tonen D på 200 cent, og så videre. Denne repræsentation er ganske velegnet til at klargøre forskellen mellem de historiske skalaer idet de relateres til den samme referenceskala. Den rene kvint, der benyttes i flere af de stemninger som skal omtales, er på 702 cent, så den ligesvævende kvint er med sine 700 cent stemt en lille smule mindre end ren.

Tabel 1 – Den ligesvævende stemning er karakteriseret ved at alle intervaller er ens. Kolonnen *Terts* angiver størrelsen af den store terts med udgangspunkt fra den pågældende tone og tilsvarende for kolonnen *Kvint*.

Tone	Definition	Terts	Kvint
Alle	$\sqrt[12]{2}$	14 cent	-2 cent

Det mindste hørbare interval svarer til en frekvensændring på cirka 0,2 % ved frekvenser omkring 1000 Hz (Moore, side 198), hvilket svarer til små 4 cent, så fejlen ved kvinten i den ligesvævende skala kan kun de færreste høre. Ved stemning af orgel eller cembalo tæller man i stedet svævningen (det vil sige en stødtone mellem to toner) for at afgøre om kvinten har den korrekte størrelse. Den store terts er i den ligesvævende skala derimod 0,8 % større end den rene terts, det svaret til 14 cent, og er hørbart falsk, men trods dette handicap er skalaen i dag altdominerende – man har simpelt hen vænnet sig til lyden.

Grænsen for det hørbare er derfor ikke det samme som grænsen for det acceptable, og der er i tilgift en meget stor grad af tilvænning. En musiker, der ikke kender til de historiske skalaer, kan derfor opfatte et rent interval som værende falsk; det klinger ikke som tilvænnet. Når der i det følgende skelnes mellem rene og urene intervaller, er der derfor inkluderet en vis portion af forfatterens personlige mening om sagen, så der er ikke kun tale om en videnskabeligt begrundet grænseværdi. Skal en grænseværdi absolut foreslås, bliver den på 1/10 af den lille sekund, det vil sige 10 cent – i ingeniørterminologien er det cirka 0,6 % – og det svarer til lidt under 3 Hz afvigelse ved kammertonens 440 Hz.

2.6.3 Rene intervaller

Når to mennesker synger sammen, eller når to instrumenter spiller sammen, er der nogle få intervaller som skiller sig ud ved at klinge særligt godt sammen. De er karakteriseret ved, at tonernes frekvensforhold kan beskrives ved et simpelt forhold, $a:b$, hvor a og b er tal fra den harmoniske række: 1, 2, 3, ..., etc. Der gælder generelt, at intervaller med meget små tal, for eksempel 3:2, vil opfattes som vellydende, mens intervaller med større tal, for eksempel 9:8, er dissonerende. Dette forhold uddybes i appendiks.

Tabel 2 – De vigtigste musikalske intervaller, som vil blive benyttet i denne rapport. Tabellen er ikke definitiv; den lille sekund kan fx være 17:16, og i praksis vil alle intervaller, undtagen prim og oktav, være justeret (tempereret) i forhold til det ideelle.

Interval	Definition	Interval
Prim	1:1	0 cent
Oktav	2:1	1200 cent
Kvint	3:2	702 cent
Kvart	4:3	498 cent
Stor terts	5:4	386 cent
Lille terts	6:5	316 cent
Stor sekund	9:8	204 cent
Lille sekund	16:15	112 cent

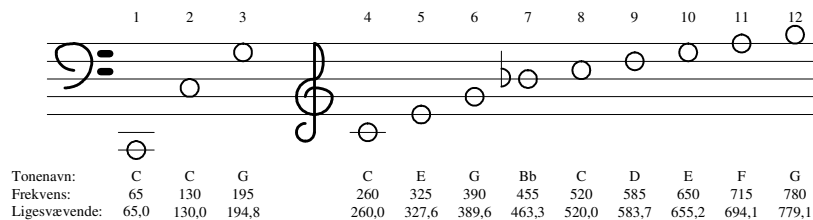
For flere af intervallerne gælder, at de kan underdeles i andre intervaller. Oktaven (2:1) kan således underdeles i kvint (3:2) og kvart (4:3):

$$(\text{Kvint}) \cdot (\text{Kvart}) = (\text{Oktav}) \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{1}$$

Kvinten kan igen deles i en stor terts (5:4) og en lille terts (6:5):

$$(\text{Stor terts}) \cdot (\text{Lille terts}) = (\text{Oktav}) \Rightarrow \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{2}$$

I middelalderen blev sådanne sammenhænge mellem kunst og videnskab tolket som et udtryk for Guds storhed; og det var menneskets opgave at søge at forstå disse relationer. Alt er dog ikke idyl, og resten af dette afsnit vil berøre de kompromisser der nødvendigvis må indgås.



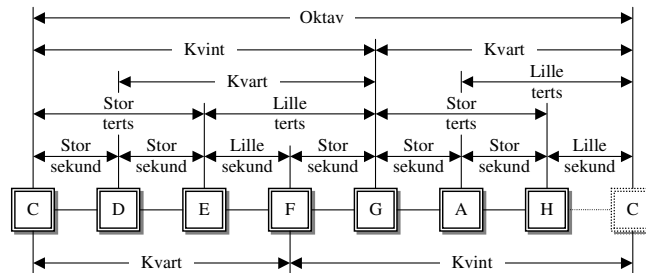
Figur 4 – Den harmoniske skala fra 1 til 12 sammenlignet med overtonerækkens frekvenser for et blæseinstrument i C (uden fingerhuller, træk eller ventiler) med $A = 437$ Hz.

Intervallerne kan relateres til den harmoniske overtonerække som vist i Figur 4, der typisk vil repræsentere resonansfrekvenserne i et blæseinstrument for et instrument stemt i C. Nederste linie gengiver de tilsvarende tonetrin ved den ligesvævende stemning; forskellen er 3 % for

tonen F (nummer 11) og mindre for de øvrige toner. Se også Figur 5, hvor tonerne er arrangeret i den diatoniske skala.

2.6.4 Den diatoniske skala

Allerede *Pythagoras* (ca. 500 år før Kristus) kendte relationerne for tonerne i den *diatoniske* skala som blev benyttet ved den gregorianske sang (cirka år 0 til 1200), og som den vestlige verdens musik er baseret på. Skalaen tager sit udgangspunkt i en kvintafstand mellem tonerne, for eksempel fra F til C, derefter fra C til G og så videre, indtil hele skalaen med de syv *stamtoner* er dannet; det vil sige tonerækken F-C-G-D-A-E-H (oktavafstand kan generelt ignoreres). Denne række kan arrangeres med tonerne i stigende orden som vist i Figur 5.



Figur 5 – Den diatoniske skala med intervallerne navngivet. De syv kirketonearter har hver sin af tonerne som udgangspunkt.

Det angives undertiden, at skalaen kan stemmes rent, men det er kun tilnærmelsesvist korrekt, idet der er indbygget et grundlæggende problem i skalaen, som tager sit udgangspunkt i det forhold, at kvinten kan dannes af en stor sekund og en kvart. Det fastlægger den store sekund, som det kan ses af Figur 5, for kvinten C-G, sekunden C-D og kvarten D-G:

$$(\text{Kvint}) = (\text{Stor sekund}) \cdot (\text{Kvart}) \Rightarrow (\text{Stor sekund}) = \frac{(\text{Kvint})}{(\text{Kvart})} = \frac{3/2}{4/3} = \frac{9}{8}$$

To store sekunder skal give en stor terts, eksempelvis for kæden C-D-E, men det er desværre ikke tilfældet med den fundne værdi der giver et interval der er 1,25 % større end ren:

$$(\text{Stor terts}) = (\text{Stor sekund}) \cdot (\text{Stor sekund}) = \frac{81}{64} \neq \frac{5}{4}$$

Hvordan man har løst problemet i middelalderen vides ikke, men et muligt bud er at sænke tonen D, så de to tonertrin C-D og D-E tilsammen giver en stor terts C-E. En tilsvarende argumentation kan fremføres for den store terts ved G-H.

2.6.5 Den kromatiske skala

Et andet problem bliver synligt når de ”manglende” toner indføres; de fem toner, der på det moderne klaver er repræsenteret ved de sorte tangenter. Den første af disse toner fremgår af Figur 4, det er tonen Bb, der optræder som den syvende harmoniske overtone. Denne tone, og de øvrige fire toner (C#, Eb, F# og G#), dukker gradvist op i den gregorianske sang for at løse forskellige skalamæssige problemer – og samtidig introducerer de ganske mange problemer for tastaturinstrumenternes musikere i både renæssance og barok.

Uden at gå i detaljer, skal de fem toner blot indføres ved, at fortsætte kvintrækken ned under F og op over H. Under F introduceres tonerne Bb og Eb og over H introduceres tonerne F#, C# og G# som kvinter over H. Dette er vist i Figur 6, hvor den sidste kvint, der slutter kæden af,

er benævnt D#. De fem nye toner passer pænt ind i den diatoniske skala, idet de ligger mellem toner med en stor sekund som afstand. Der bliver derved en lille sekund mellem enhver tone i skalaen – den kromatiske skala er født.

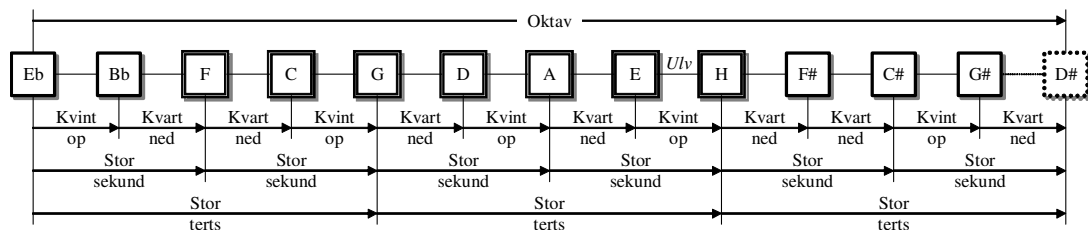
Musikalsk notation

Betegnelsen for tonen Bb er en kompromisnotation, som reflekterer problemet med, at tonen H i den engelske nomenklatur betegnes med B (udtales oftest som *B natural*). Tonen, der ligger en lille sekund under H, kaldes i den tyske sprogstamme (og dermed på dansk) for B og på engelsk for Bb (udtales *B flat*). For at undgå forveksling, betegnes tonerne her for henholdsvis H og Bb.

Tonerne Eb og Bb kunne noteres D# og A#, hvilket i den ligesvævende skala ville være de samme toner (det musikere kalder for *omtydning* af tonen). De fleste historiske skalaer skelner dog skarpt mellem D# og Eb; den første tone leder frem til en akkord (treklang) på E, den anden indgår i skalaer baseret på tonen F. På visse cembaloer forefindes tonerne derfor som en dobbelttangent med separate taster for D# og Eb. Tilsvarende gælder for G# og Ab, hvorimod tonerne Bb, C# og F# stort set ikke omtydes i ældre musik. Det er barokmusikkens eksperimenter med udviklede harmoniske sammenhænge, der leder til at slå tangenterne sammen, så D# og Eb bliver samme tone og tilsvarende for G# og Ab.

2.6.6 Den Pythagorenske stemning

Selv om Pythagoras næppe har ført den diatoniske skala frem til at bestå af alle 12 toner i oktaven, benyttes hans navn for det stemningsprincip, hvor alle toner ligger i kvintafstand, som vist i Figur 6. Oktaven kan derfor dannes af en kæde af 12 kvinter. Ved den praktiske stemning af et instrument veksles der typisk mellem opgående kvint og nedadgående kvart, som vist i figuren, men det har ingen musikteoretisk betydning.



Figur 6 – Pythagorensk stemning hvor de indskudte toner er markeret med sort kant i firkanterne (svare til de "sorte" tangenter) mens stamtonerne har dobbelt kant (svare til de "hvide" tangenter).

Tonen D# yderst til højre skulle ideelt være identisk med Eb (på nær en oktav) for at kunne slutte kæden, men det kan ikke lade sig gøre med rene intervaller (uden at dele tangenten i to for D# og Eb). Som det ses af Figur 6 skal to krav tilfredsstilles for at kunne forbinde begyndelsen og afslutningen på kæden: Oktaven skal kunne dannes af *tre store tertser* samt af *seks store sekunder*.

Tages udgangspunkt i rene intervaller ses problemet tydeligt, idet tre store tertser ikke er tilstrækkeligt til at nå helt op på oktaven, og seks store sekunder er for meget, idet der skydes noget over målet:

$$(\text{Oktav}) = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = 1,9531\dots \quad \text{samt} \quad (\text{Oktav}) = \left(\frac{9}{8}\right)^6 = 2,0272\dots$$

Tertserne rammer oktaven 2,34 % for lavt, almindeligvis kaldet for (lille) *diesis*, mens sekunderne rammer oktaven 1,36 % for højt, og kaldes for det *pythagorenske komma*, eller blot *komma*. Oktaven skal stemmes rent for at instrumenter i forskellige tonelejer ikke får

sammenstød mellem grundtone og den anden harmoniske overtone, så det er nødvendigt at gøre noget. I den Pythagorenske stemning klares problemet på den brutale måde, at en af kvinterne stemmes for lille, mens de øvrige stemmes rent; kvinten bliver derved ubrugelig og får tilnavnet *Ulven*, på engelsk: *Wolf*. Det urene interval kan afledes fra oktaven, som består af seks kvinter og seks kvarter, med den ene kvint stemt falsk. Det urene interval bliver:

$$(\text{Ulv}) = \frac{(\text{Oktav})}{(\text{Kvint op})^5 \cdot (\text{Kvart ned})^6} = \frac{2}{(3/2)^5 \cdot (3/4)^6} = 1,4798\dots$$

Konsekvensen af denne forstemning, som blev anvendt omkring 1450, er at den store tert bliver 81:64, hvilket er 1,25 % større end det rene interval. Musikerne var dog udmærket klar over, at der kunne drages en interessant fordel af ulven. Som Figur 6 viser, dannes den store tert G-H ud fra kvintrækken G-D-A-E-H. Med ulven som den ene af kvinterne, bliver den store tert formindsket så meget, at den næsten bliver ren, den er blot 0,11 % mindre end idealet (2 cent), så de fire tertser der kan dannes omkring ulven bliver næsten helt rene:

$$(\text{Stor tert}) = \frac{(\text{Kvint}) \cdot (\text{Ulv})}{(\text{Kvart}) \cdot (\text{Kvart})} = \frac{(3/2) \cdot (1,4798\dots)}{(3/4) \cdot (3/4)} = 1,2485\dots$$

Lægges ulven, som vist i figuren ved E-H, bliver treklange G-H-D, D-F#-A og A-C#-E meget vellydende, derimod bliver treklangen E-G#-H ubrugelig på grund af ulven og de øvrige otte treklange bliver meget anstrengte på grund af tertserne, selv om kvinterne er rene.

Resultatet af denne stemningsmetode er vist nedenfor.

Tabel 3 – Den Pythagorenske stemning med ulv på E-H. Søjlen Afvigelse refererer til den ligesvævende temperering. Søjlerne Terts og Kvint refererer til den store tert eller kvint op fra den angivne tone.

Tone	Definition	Frekvens	Afvigelse	Terts	Kvint
H	Kvint under F#, oktav op	488,34 Hz	-20 cent	22 cent	0 cent
Bb	Kvint under F, oktav op	463,54 Hz	-10 cent	22 cent	0 cent
A	Kammertone (reference)	440,00 Hz	0 cent	-2 cent	0 cent
G#	Kvint under D#, oktav op	412,03 Hz	-14 cent	22 cent	0 cent
G	Kvint under D, oktav op	391,11 Hz	-4 cent	-2 cent	0 cent
F#	Kvint under C#, oktav op	366,25 Hz	-18 cent	22 cent	0 cent
F	Kvint under C, oktav op	347,65 Hz	-8 cent	22 cent	0 cent
E	Kvint over A, oktav ned	330,00 Hz	2 cent	-2 cent	-23 cent
Eb	Kvint under Bb	309,03 Hz	-12 cent	22 cent	0 cent
D	Kvint under A	293,33 Hz	-2 cent	-2 cent	0 cent
C#	Kvint under G#	274,69 Hz	-16 cent	22 cent	0 cent
C	Kvint under G	260,74 Hz	-6 cent	22 cent	0 cent

Den Pythagorenske skala giver tre treklange, som er næsten helt rene, og ni treklange som i praksis er ubrugelige på grund af de meget store tertser og en ulv kvint.

2.6.7 Middeltone (1/4 komma)

I renæssancen var vellyden af den rene terts meget central. Fastholdes derfor kravet om at den store tert skal være ren, men nu for så mange forskellige toner som muligt, må der foretages en temperering af de intervaller som danner den store tert. Kaldes korrektionen af kvarten for

α , bliver korrektionen af kvinten $1/\alpha$, og derved findes den store terts udtrykt ved to tempererede kvinter og to tempererede kvarter, til:

$$\frac{(\text{Kvint}) \cdot (\text{Kvint})}{(\text{Kvart}) \cdot (\text{Kvart})} = (\text{Stor terts}) \Rightarrow \frac{\frac{3}{2\alpha} \cdot \frac{3}{2\alpha}}{\frac{4\alpha}{3} \cdot \frac{4\alpha}{3}} = \frac{5}{4} \Rightarrow \alpha = \sqrt[4]{\frac{3^4 \cdot 4}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 5}} = 1,0031\dots$$

Korrektionen ser måske lille ud, blot 0,31 % (5 cent) forstørrelse af kvarten og en tilsvarende formindskelse af kvinten, men ændringen er hørbart falsk, dog ikke værre end at den kan bruges. I forbindelse med treklange er middeltone en virkelig god stemning.

Tempereringen af kvinter og kvarter giver dog ikke rene store tertser for alle 12 store tertser, og det er en væsentlig anke ved middeltone stemningen. Der skal tre store tertser for at danne en oktav, og denne stabling af tertser kan foretages på fire måder:

$$\left. \begin{array}{l} 1: \quad Ab \quad C \quad E \quad G\# \quad \quad Ab - C \\ 2: \quad Db \quad F \quad A \quad C\# \quad \quad Db - F \\ 3: \quad Bb \quad D \quad F\# \quad A\# \quad \quad F\# - A\# \\ 4: \quad Eb \quad G \quad H \quad D\# \quad \quad H - D\# \end{array} \right\} = \text{falske}$$

Idet tre store tertser ikke kan danne en ren oktav, må den ene af dem blive større end ren for at de to andre kan blive rene. Følgelig er der ved middeltone stemningen i alt 8 rene store tertser og 4 stærkt forstørrede store tertser, der i praksis er ubrugelige (2,34 % eller 40 cent). Denne stemning kaldes for 1/4 komma middeltone, idet det pythagorenske komma er ligeligt fordelt mellem de fire kvinter (egentlig mellem to kvinter og to kvarter).

Tabel 4 – Middeltone stemning (1/4 komma) med temperering af kvinten på -0,311 %.

Tone	Definition	Frekvens	Afvigelse	Terts	Kvint
H	Stor terts over G	491,94 Hz	-7 cent	41 cent	-5 cent
Bb	Stor terts under D, oktav op	470,79 Hz	17 cent	0 cent	-5 cent
A	Kammertone (reference)	440,00 Hz	0 cent	0 cent	-5 cent
G#	Stor terts over E	411,22 Hz	-17 cent	41 cent	36 cent
G	Tempereret kvint over C	393,55 Hz	7 cent	0 cent	-5 cent
F#	Stor terts over D	367,81 Hz	-10 cent	41 cent	-5 cent
F	Stor terts under A	352,00 Hz	14 cent	0 cent	-5 cent
E	Stor terts over C	328,98 Hz	-3 cent	0 cent	-5 cent
Eb	Stor terts under G	314,84 Hz	21 cent	0 cent	-5 cent
D	Tempereret kvart under G	294,25 Hz	3 cent	0 cent	-5 cent
C#	Stor terts over A	275,00 Hz	-14 cent	41 cent	-5 cent
C	Tempereret kvart under F	263,18 Hz	10 cent	0 cent	-5 cent

Middeltone stemningen danner næsten perfekte treklange med følgende otte grundtoner: Eb, Bb, F, C, G, D, A og E. De øvrige treklange er ubrugelige og der er en ulv på G#-D#.

2.6.8 Middeltone (1/5 komma)

En noget mildere temperatur kan opnås ved at tillade at tertsen også tempereres hvorved kvinten ikke skal tempereres så hårdt. Her er korrektionen repræsenteret ved parameteren β .

Den nedre grænse for parameteren er $\beta = 1$ og den øvre grænse er ved den pythagorenske terts med $\beta = 1,0125$.

Vi har følgende sammenhæng:

$$\frac{(\text{Kvint}) \cdot (\text{Kvint})}{(\text{Kvart}) \cdot (\text{Kvart})} = (\text{Stor terts}) \Rightarrow \frac{\frac{3}{2\alpha} \cdot \frac{3}{2\alpha}}{\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3}} = \frac{5\beta}{4} \Rightarrow \alpha = \sqrt[4]{\frac{81}{80\beta}}$$

Et muligt valg af β er en stemning hvor intervallerne terts, kvart og kvint svæver nogenlunde lige meget. Svævningen er udtrykt ved frekvensdifferensen mellem de laveste overtoner der interfererer. For to toner i kvintafstand (3:2) er det differensen mellem den dybe tones tredje harmoniske og den høje tones anden harmoniske. For to toner i stor terts afstand (5:4) er det differensen mellem den dybe tones femte harmoniske mod den høje tones fjerde harmoniske. Kaldes grundtonen for f_G , tertsens tone for f_T og kvintens tone for f_K , eksemplificeret ved tonen C for grundtonen, tonen E for tertsen og tonen G for kvinten, findes:

$$f_T = \frac{5\beta}{4} f_G \Rightarrow \Delta f_T = |4f_T - 5f_G| \Rightarrow \Delta f_T = \left| 4 \frac{5\beta}{4} f_G - 5f_G \right| \Rightarrow \Delta f_T = (\beta - 1)5f_G$$

$$f_K = \frac{3}{2\alpha} f_G \Rightarrow \Delta f_K = |2f_K - 3f_G| \Rightarrow \Delta f_K = \left| 2 \frac{3}{2\alpha} f_G - 3f_G \right| \Rightarrow \Delta f_K = \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) 3f_G$$

For ens differensfrekvenser findes:

$$(\beta - 1)5f_G = \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) 3f_G \Rightarrow \beta = 1 + \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{3}{5} = \frac{8}{5} - \frac{3}{5\alpha}$$

Dette indsættes i udtrykket for α for en iterativ bestemmelse af værdien:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{81}{80 \left(\frac{8}{5} - \frac{3}{5\alpha} \right)}}$$

Startes med $\alpha = 1$ findes $\alpha = 1,002705$ efter syv trin og heraf følger $\beta = 1,001619$. For en tone på $f_G = 440$ Hz bliver differensfrekvensen på 3,6 Hz hvilket ikke er særligt generende i praksis (det er faktisk rarere at høre på end den stillestående klang af et rent interval).

Det pythagorenske komma er på 1,36 % og kvinten skal sænkes med 0,27 %, så denne temperering svarer til 1/5 komma. Det er en ofte forekommende temperering i renaissance og barok. Talværdierne for stemningen er vist i Tabel 5.

Tabel 5 – Middeltone stemning (1/5 komma) med temperering af kvinten på -0,27 % og den store terts med +0,16 %.

Tone	Definition	Frekvens	Afvigelse	Terts	Kvint
H	Tempereret stor terts over G	492,34 Hz	-5 cent	36 cent	-5 cent
Bb	Tempereret stor terts under D, oktav op	469,87 Hz	14 cent	3 cent	-5 cent
A	Kammertone (reference)	440,00 Hz	0 cent	0 cent	-7 cent
G#	Tempereret stor terts over E	411,60 Hz	-16 cent	37 cent	30 cent
G	Tempereret kvint over C	393,24 Hz	5 cent	3 cent	-5 cent
F#	Tempereret stor terts over D	368,26 Hz	-8 cent	36 cent	-8 cent
F	Tempereret stor terts under A	351,44 Hz	11 cent	3 cent	-5 cent
E	Tempereret stor terts over C	328,75 Hz	-5 cent	3 cent	-3 cent
Eb	Tempereret stor terts under G	314,09 Hz	16 cent	3 cent	-5 cent
D	Tempereret kvart under G	294,14 Hz	3 cent	3 cent	-5 cent
C#	Tempereret stor terts over A	275,00 Hz	-14 cent	38 cent	-4 cent
C	Tempereret kvart under F	262,87 Hz	8 cent	1 cent	-5 cent

Stemningen har samme karakteristika som 1/4 komma middeltone.

2.6.9 Valotti stemningen

I barokken fraviges gradvist kravet om en ren stor terts for derved at opnå større harmonisk frihed. Et vellykket kompromis er Valotti stemningen, hvor seks af kvinterne stemmes rent og de seks andre deler det pythagorenske komma. De tempererede kvinter er derfor formindsket med cirka 0,23 %, hvilket er det dobbelte af den ligesvævende stemning.

Tabel 6 – Valotti stemning med temperering af kvinten på -0,23 % for seks af kvinterne.

Tone	Definition	Frekvens	Afvigelse	Terts	Kvint
H	Tempereret kvint over E	492,73 Hz	-4 cent	22 cent	0 cent
Bb	Kvart over F	467,82 Hz	6 cent	10 cent	0 cent
A	Kammertone (reference)	440,00 Hz	0 cent	14 cent	-4 cent
G#	Kvint over C#	415,74 Hz	2 cent	18 cent	0 cent
G	Tempereret kvart over D	392,91 Hz	4 cent	6 cent	-4 cent
F#	Kvart under H	369,55 Hz	-2 cent	22 cent	0 cent
F	Tempereret kvart over C	350,86 Hz	8 cent	6 cent	-4 cent
E	Tempereret kvart under A	329,24 Hz	-2 cent	18 cent	-4 cent
Eb	Kvint under Bb	311,88 Hz	4 cent	14 cent	0 cent
D	Tempereret kvint under A	294,01 Hz	2 cent	10 cent	-4 cent
C#	Kvart under F#	277,16 Hz	0 cent	22 cent	0 cent
C	Tempereret kvint under G	262,54 Hz	6 cent	6 cent	-4 cent

Den store terts varierer ganske meget mellem tonearterne, men er for skalaer baseret på C, F og G kun tempereret med 6 cent, hvilket blot er det dobbelte af 1/5-komma middeltone. For de mere "eksotiske" skalaer baseret på H, F# og C# er den store terts 22 cent, eller stort set det samme som ved den pythagorenske og derfor med stærkt begrænset anvendelighed som følge. Tonearterne Eb og A er stort set tempereret som den ligesvævende skala.

<i>Db</i>	<i>Ab</i>	<i>Eb</i>	<i>Bb</i>	<i>F</i>	<i>C</i>	<i>G</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>E</i>	<i>H</i>	<i>F#</i>
22	18	14	10	6	6	6	10	14	18	22	22

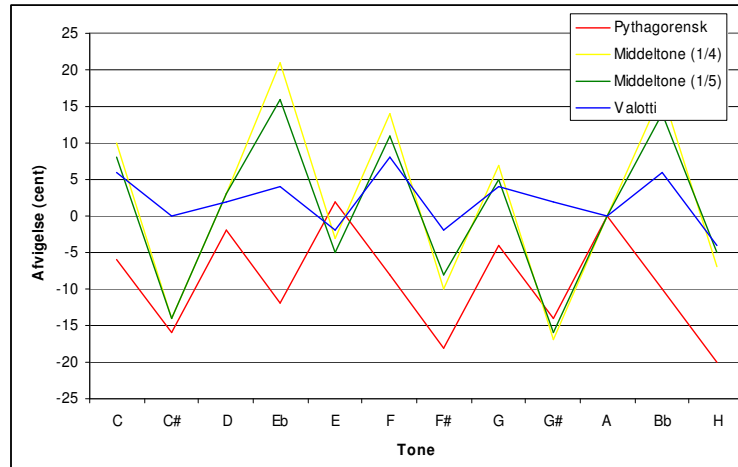
2.6.10 Sammenfatning

Dette afsnit sammenfatter de fire udvalgte skalaer sammenlignet med den ligesvævende skala hvor tonen A er benyttet som reference. Resultaterne er samlet i Tabel 7 og præsenteres desuden grafisk i Figur 7 og Figur 8. Den pythagorenske skala har ulven placeret på E-H; hvilket blot er et enkelt af de 12 mulige valg og middeltoneskalaerne kan, i det mindste rent teoretisk, også arrangeres på andre måder. Valgene er truffet for at prioritere de syv toner i den diatoniske skala og de harmonier der kan dannes ud fra disse skalatoner.

Tabel 7 – Sammenfatning af stemningskrav.

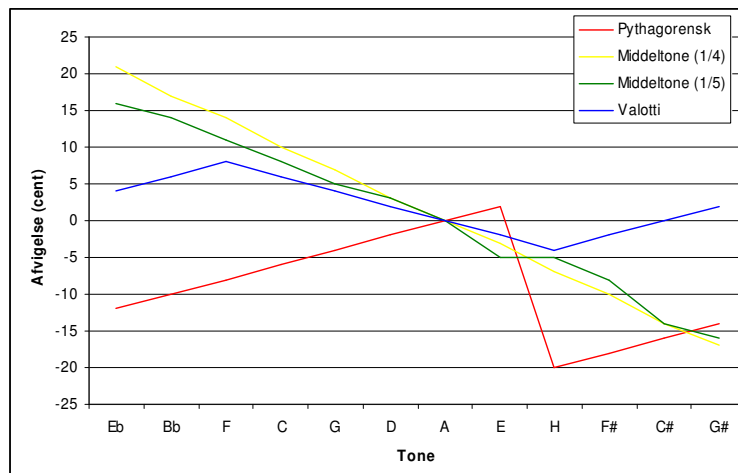
Tone	Pythag.	1/4-MT	1/5-MT	Valotti	Lavest	Højest
H	-20 cent	-7 cent	-5 cent	-4 cent	-20 cent	-4 cent
Bb	-10 cent	17 cent	14 cent	6 cent	-10 cent	17 cent
A	0 cent	0 cent	0 cent	0 cent	0 cent	0 cent
G#	-14 cent	-17 cent	-16 cent	2 cent	-17 cent	2 cent
G	-4 cent	7 cent	5 cent	4 cent	-4 cent	7 cent
F#	-18 cent	-10 cent	-8 cent	-2 cent	-18 cent	-2 cent
F	-8 cent	14 cent	11 cent	8 cent	-8 cent	14 cent
E	2 cent	-3 cent	-5 cent	-2 cent	-5 cent	2 cent
Eb	-12 cent	21 cent	16 cent	4 cent	-12 cent	21 cent
D	-2 cent	3 cent	3 cent	2 cent	-2 cent	3 cent
C#	-16 cent	-14 cent	-14 cent	0 cent	-16 cent	0 cent
C	-6 cent	10 cent	8 cent	6 cent	-6 cent	10 cent

Tempereringen andrager en korrektion omkring ± 20 cent ($\pm 1,2\%$) overfor den ligesvævende skala, så der skal måles en hel del bedre end dette for at kunne skelne mellem skalaerne. Det gentager det indledende ønske, om at måle tonernes frekvens indenfor $\pm 0,5\%$.



Figur 7 - Grafisk fremstilling af de historiske skalaer overfor den ligesvævende stemning med tonerne arrangeret som i den kromatiske skala.

Den kromatiske fremstilling i Figur 7 kan være vanskelig at læse, i det mindste når problemet er relateret til intonation til tonearter med få fortegn. For at forbedre læsningen for disse, vigtige, tonearter er fremstillingen i Figur 8 arrangeret med tonerne i kvintafstand. Figureerne er i øvrigt identiske.



Figur 8 – Grafisk fremstilling af de historiske skalaer overfor den ligesvævende stemning med tonerne arrangeret i kvintafstand for at lette tolkningen for tonearter med få fortegn.

De mindst tempererede toner, når de betragtede skalaer sammenholdes, er tonerne C, D, E, G og A, der ligger indenfor ± 10 cent overfor den ligesvævende skala, mens tonerne C#, F, F#, G#, Bb og H ligger indenfor ± 20 cent. Tonen Eb ligger længst væk med 21 cent.

Konklusionen må derfor være, at en zinkspiller skal kunne intonere sit instrument med godt og vel ± 1 % for, at kunne spille rent overfor et tastaturinstrument.

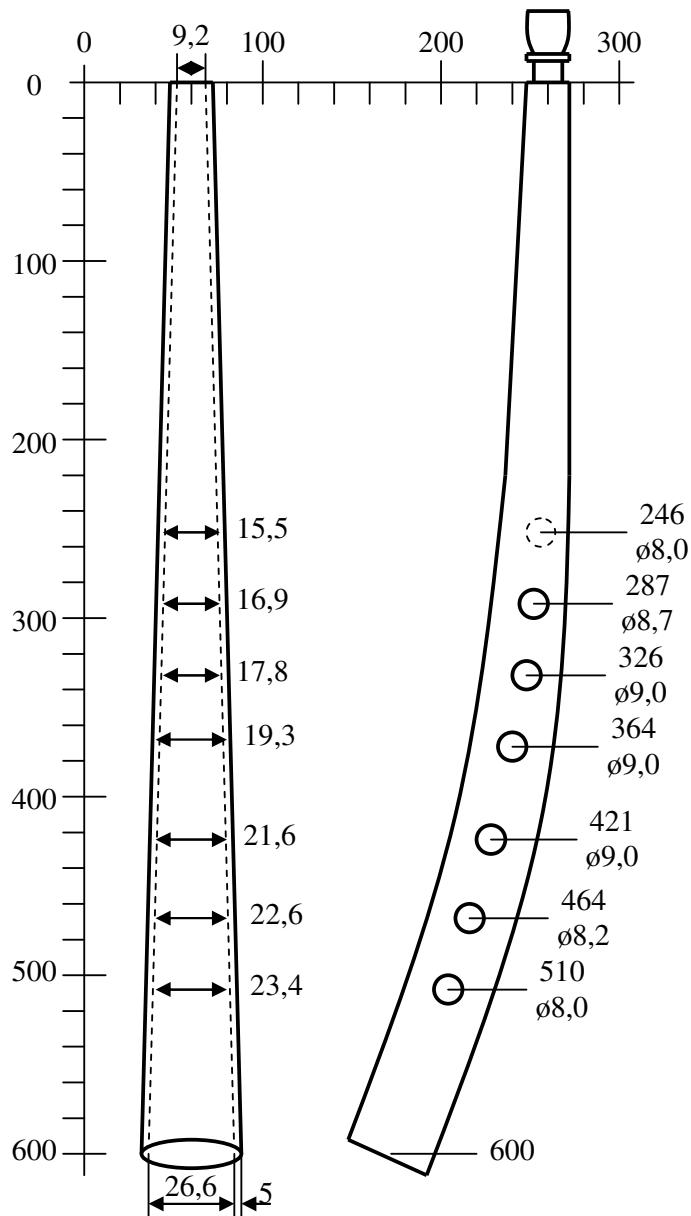
Tilsvarende kræves at zinkens naturlige resonansfrekvenser skal bestemmes indenfor 5 cent, det vil sige 0,3 %, for at klagøre et skalamæssigt slægtskab. Det vil desværre vise sig at være et krav, som ikke kan indfries.

3 Måling

Instrumentets rør er svagt konisk og er forsynet med syv huller som fingrene kan dække for derved at variere rørets effektive længde. Materialet er buksbom og instrumentet er omviklet med læder for at dække over utætheder, for at forhindre fingrene i at glide, samt af æstetiske grunde. Zinken blev opmålt for at skaffe de nødvendige data til det teoretiske afsnit. Mundstykket, der ses øverst til højre (ved 260 mm mærket), omhandles separat i afsnit 3.2.1.

3.1 Målskitse

Zinkens mål er gengivet nedenfor og nøjagtigheden anslås til at ligge indenfor ± 1 mm.



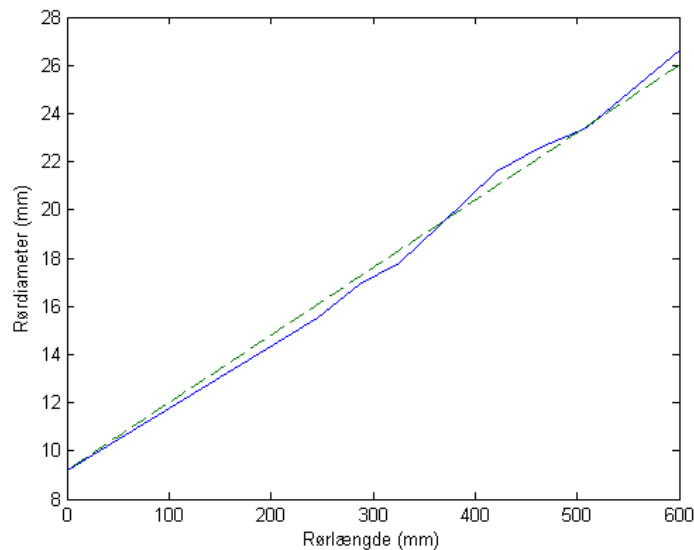
Figur 9 – Målskitse for en *Christopher Monk G-Cornetti*. Mål i millimeter.

Den indvendige diameter begynder med 9 mm ved mundstykket, stigende til 26 mm ved udgangen, og blev undervejs gennem røret bestemt ved at måle afstanden fra oversiden af hvert af hullerne til den modsatte inderside og derfra fratække tykkelsen af rørets væg. Væggens tykkelse er 5,8 mm ved mundstykket, faldende til 5 mm ved udgangen, og det er antaget at tykkelsen falder lineært gennem instrumentets længde.

Længden er 600 mm målt som et gennemsnit af henholdsvis indersiden og ydersiden af krumningen, og der kan ikke forventes en bedre præcision end cirka ± 1 mm. De samme kommentarer gælder for placeringen af hullerne, men de er ikke vigtige for denne rapport. Den indvendige diameter og hullernes diametre er målt med en skydelære og forventes at holde mindst samme nøjagtighed.

3.1.1 Diametervariation

Nedenfor vises rørets udvidelse, det vil sige rørets diameter som funktion af længden. Udvidelsen er med en god tilnærmelse lineær, som det vises ved den stiplede linie, der er en ret linie fra mundstykkets diameter på 9,2 mm til 26,0 mm. Den faktiske diameter er en anelse større ved åbningen i den brede ende.



Figur 10 – Diameteren af røret som funktion af positionen gennem røret. Udviklingen er tilnærmelsesvist lineær.

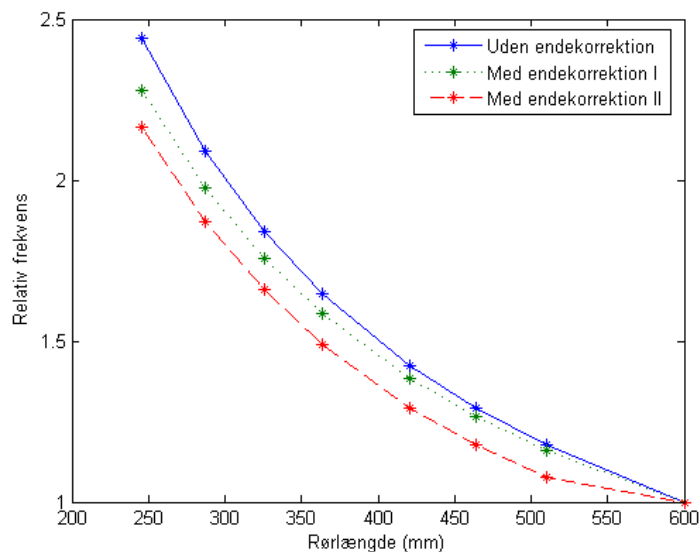
Diameterens variation er relativt lille, blot 2,9 gange fra mundstykket til den brede ende, hvilket leder til den antagelse, at instrumentet ved den teoretiske analyse kan modelleres som en cylinder, der er lukket i den ene ende. Som det vil ses af det følgende er resultatet ikke acceptabelt, så modellen ændres til et udsnit af en konus, der langt bedre repræsenterer den faktiske udformning af instrumentet.

Starten af instrumentet er mere kompliceret end som vist, idet selve mundstykket ændrer den første del fra mundstykkets diameter på 3,5 mm til rørets start på 9,2 mm, inden den koniske udvikling starter. Dette antages at være af mindre betydning for instrumentets modellering.

3.1.2 Fingerhuller

Resonansfrekvensen afhænger af hvordan fingrene sættes. Rørets længde ændres fra 600 mm, med alle fingre placeret over hullerne, til 246 mm, når alle fingre løftes væk fra hullerne. Hullernes funktion er at skabe en trykudligning på et givet sted, så der ikke kan opbygges et overtryk der hvor hullet er. Det svarer effektivt set til at røret afskæres ved første åbne hul.

Dette er illustreret i Figur 11, under den antagelse at der ikke skal benyttes nogen korrektion for medsvingende luft (endekorrektion); det antages, at røret stopper ved hullets centrum. Første markering yderst til venstre svarer til at alle huller er åbne, dernæst adderes først venstre hånds tommelfinger, dernæst pege-, lang- og ringfinger, dernæst højre hånds pege-, lang- og ringfinger. Det skal ideelt give en skala startende ved A-440 og ned til A-220; det vil sige et frekvensforhold på 2:1, men der er som vist en del afvigelse fra denne regel.



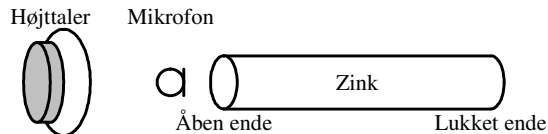
Figur 11 – Relativ frekvens for hornet med stigende antal fingre placeret over hullerne.

Selv med endekorrektion bliver resultatet ikke som forventet. Den midterste linie i Figur 11 inkluderer et arbitrært valg af endekorrektion som to gange diameteren ved hullet og er her gældende for alle huller, også det store hul i afslutningen af instrumentet, men det giver kun en lille forbedring. Den nederste linie inkluderer kun endekorrektionen for fingerhullerne, svarende til at en del af det efterfølgende rør medregnes i den effektive længde af røret, mens røret selv, med alle huller dækket af fingrene, afsluttes ved 600 mm.

Der er ingen grund til at benytte de officielle formler for endekorrektion; de vil ikke forbedre resultatet.

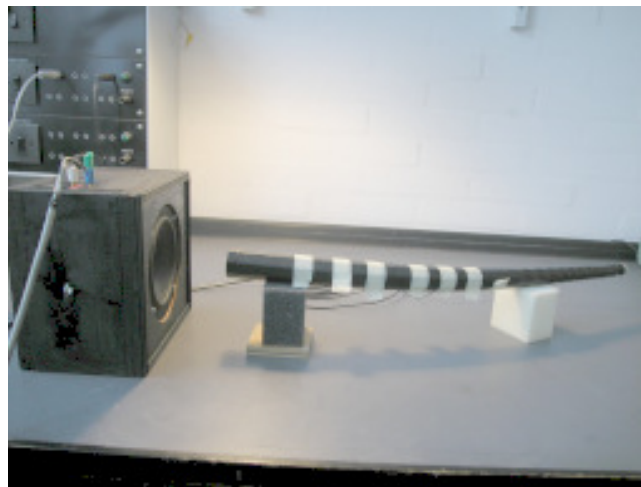
3.2 Måleopstilling

Som et oplæg til projektet, var det ideen at anslå resonanserne i røret med en højttaler og måle resonansen med en mikrofon placeret på samme side som højttaleren. Det var forventet, at lydtrykket ville stige ved resonans og at dette kunne opfanges af mikrofonen, men det var forventet, at det kunne blive vanskeligt, at adskille højttalerens signal fra rørets respons.



Figur 12 – Oplæg til måleopstilling hvor en højttaler exciterer instrumentets resonator og en mikrofon måler responsen ved resonans som en stigning i lydtrykket.

Resonansfrekvenserne for zinkens kan også måles ved at drive instrumentet fra en høj impedans via mundstykket, og derefter måle det akustiske udgangssignal med en mikrofon. Den situation vil minde mest muligt om den praktiske anvendelse som et musikinstrument, men det er vanskeligt, at konstruere en signalkilde med en tilstrækkeligt høj impedans. Det er muligt at måle indgangsimpedansen ved mundstykket, men det giver en relativt kompliceret måleopstilling (Sylvest, side 20-38), som ikke kan passes ind i den snævre tidsramme for dette projekt.



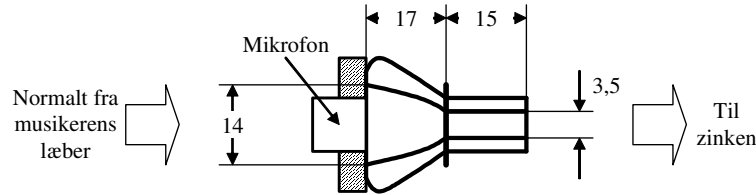
Figur 13 – Måleopstilling A med drivning af zinken fra den brede ende af instrumentet. Opstillingen blev også benyttet til at studere påvirkningen fra højttaleren på den naturlige resonansfrekvens. De hvide lapper er afdækningstape (to per hul), som lukker for hullerne så resonansen bliver det dybe A.

Den valgte målemetode blev foreslået af projektets vejleder efter en diskussion af oplægget. Lydtrykket måles i selve mundstykket med en højttaler placeret udenfor instrumentet. Metoden tager sit udgangspunkt i reciprocitetssætningen, der siger, at overførselsfunktionen for et passivt og lineært system er den samme i begge retninger. Zinken er et passivt system og linearitet kan forudsættes for moderate lydtrykniveauer.

Målingen benytter ikke en kalibreret mikrofon, og da lydtrykket fra højttaleren heller ikke bliver målt, er konsekvensen, at den målte overførselsfunktions amplitudeværdier bliver ubestemte, men det vil ikke på nogen måde påvirke bestemmelsen af resonansfrekvenserne.

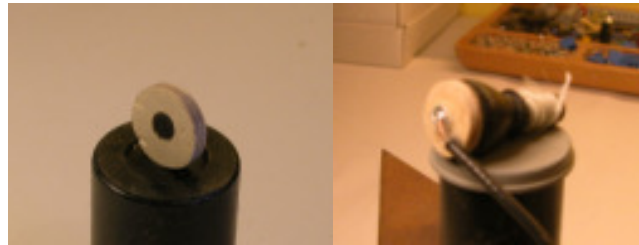
3.2.1 Mundstykke

For at kunne måle lydtrykket ved mundstykket, blev et slidt, men absolut funktionsdygtigt, mundstykke modificeret for at kunne måle lydtrykket.



Figur 14 – Mundstykket med nogle få måleværdier. Mundstykkets funktion er at afgrænse den svingende del af læberne samt at justere det pulserende signals frekvensspektrum. Ved modifikationen afgrænses mundstykket af en plade med en mikrofon.

Den åbning der normalt vender ind mod musikerens læber, til venstre i Figur 14, blev forsynet med en lille træplade af 4 mm birkefiner hvor mikrofonen blev monteret i et 6 mm hul. Mikrofonen blev forseglet i hullet med lim (cyanoacrylat) og samme lim blev benyttet ved fiksering af træpladen på mundstykket.



Figur 15 – Mikrofonen limes fast i en lille træplade og pladen limes fast til mundstykket. Den hvide tråd benyttes ved montage i instrumentet for at tætte koblingen.

Forbindelsen til mikrofonen var et stykke RG174 coaxialkabel som blev loddet til de to terminaler og fastgjort til træpladen med samme lim. Aflastningen var vigtig, idet mikrofonen ikke tåler at terminalerne belastes for hårdt. Det er ganske vist ikke en særlig stærk aflastning, men den har fungeret upåklageligt under målingerne.



Figur 16 – Komplet opstilling med modificeret mundstykke og mikrofontilslutningsboks.

Koblingen mellem mundstykket og selve instrumentet kan opfattes som et anden ordens filter, der dannes af den Helmholtz resonator, som den indespærrede luftmængdes eftergivelse og massen af luft i tilslutningsrøret udgør. Filterets funktion er at dæmpe høje frekvenser og derved dæmpe mislyde fra musikerens blæsning.

Eftergivelsen C_A af den indespærrede luft med volumen V udledes i det teoretiske afsnit. Mundstykkets volumen er tilnærmelsesvist givet ved en keglestub efter Speigel formel 4.42 som $V = \pi(a^2 + ab + b^2)h/3$, med radierne $a = 7$ mm og $b = 1,75$ mm og højden $h = 17$ mm.

$$C_A = \frac{V}{\rho_0 c^2} = \frac{\pi(a^2 + ab + b^2)h}{3\rho_0 c^2} = 8,11 \cdot 10^{-12} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^4 \text{ s}^2$$

Massen M_A af luft i det rør, der forbinder mundstykkets volumen med zinkens resonator, er også udledt i det teoretiske afsnit. Rørets tværsnitsareal er $S = \pi s^2$, hvor radius er $s = 1,75$ mm og længden af hullet er $L = 15$ mm. Der tages ikke hensyn til massen af en medsvingende luft, og da afslutningen ikke er det frie felt, men den højimpedante indgang til zinken, kan resultatet ikke forventes at være særligt præcist.

$$M_A = \frac{\rho_0 L}{3S} = \frac{\rho_0 L}{3\pi s^2} = 624 \text{ kgm}^{-4}$$

Grænsefrekvensen f_M af filteret ved mundstykket bliver derved:

$$f_M = \frac{1}{2\pi\sqrt{M_A C_A}} = 2,2 \text{ kHz}$$

Grænsefrekvensen ligger så højt i forhold til instrumentets formåen, at filteret næppe påvirker rapportens målinger, idet det udelukkende er resonansfrekvensernes toppe til cirka 1 kHz, der er af interesse.

3.2.2 Mikrofon

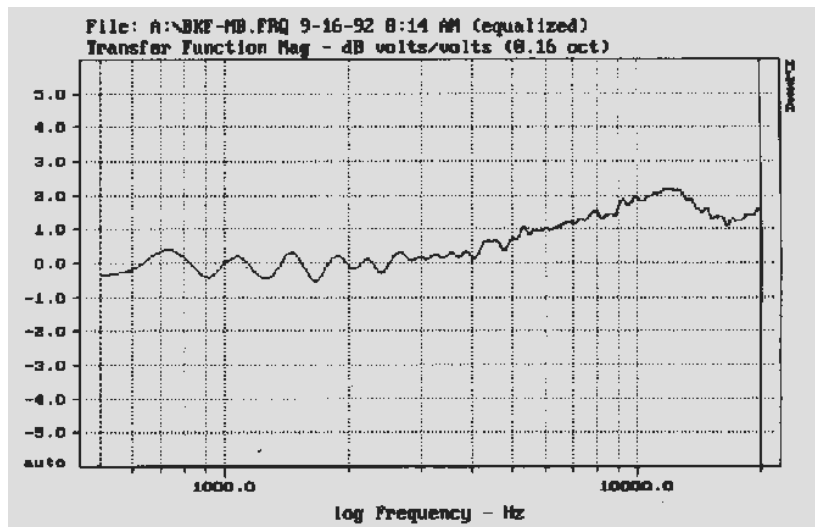
Den anvendte mikrofon (Panasonic MCE-2000) er af typen elektret og måler 6 mm i diameter og 5 mm i længde. Det er en kondensatormikrofon med ”indbygget” polarisationsspænding. Den høje udgangsimpedans fra kondensatormikrofonen sænkes af en FET-buffer til en mere håndterlig impedans i omegnen af 2 kΩ.

Tabel 8 – Specifikationer for Panasonic MCE-2000 kondensatormikrofon. Data er hentet fra http://www.shop3000.de/product_info.php/products_id/1671.

Parameter	Specifikation
Frekvensområde	20 ... 20.000 Hz, ±2 dB
Følsomhed ved 1 kHz	6 mV/Pa, ±4 dB
Signal/støjforhold	>58 dB
Temperaturområde	0 ... 40 °C
Forsyning (via modstand)	1,5 ... 10 V @ 0,5 mA

Der er ikke tale om en præcisionsmålemikrofon, men den er god nok til nærværende opgave. Støjen fra mikrofonen er ret høj; niveauet svarer til en dæmpet konversation, så der kræves et lydtryk i mundstykket på mindst 80 dB SPL for at komme over mikrofonens støj. I praksis er det dog ikke et problem at opnå et godt signalniveau, idet Brüel & Kjær PULSE analysatoren

benytter smalbåndsanalyse (FFT) og gennemsnit over de målte dataserier. Desuden lå lydtrykket i omegnen af 100 dB re. 20 μ Pa under målingerne.

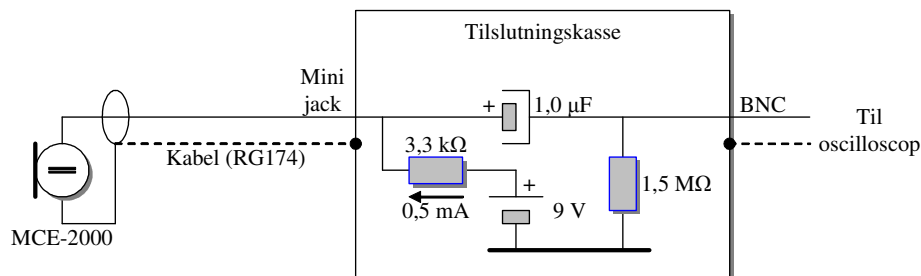


Figur 17 – Frekvensgang for MCE-2000 med B&K 4155 som reference. Måleopstillingen er ukendt. Data er hentet fra en selvbyggers hjemmeside, hvor et lille laboratorium for måling af lyd beskrives (<http://tkhifi.homepage.dk/simpelspeakers/speaker-mes-simpel.html>). Kilden angiver fagtidsskriftet *Elektor* som reference.

Overførelsesfunktionen for mikrofonen er ikke væsentlig, blot den er fri for generende spidser og dyk i det interessante frekvensområde fra cirka 200 Hz til 1 kHz. En kalibrering af mikrofonen er ikke foretaget, men en kilde fra Internettet giver et resultat som er gengivet i Figur 17. Den antyder en retlinet karakteristik indenfor et par decibel, som det da også er lovet i specifikationen.

3.2.3 Mikrofonboks

Mikrofonens FET-buffer skal effektforsynes udefra, så mikrofonens kabel ledes gennem en metalboks med batteri og de få nødvendige støttekomponenter. Mikrofonkablet er afsluttet med en jackstik, og effektforsyningen afbrydes ved at stikket tages ud.



Figur 18 – Mikrofonens FET-buffer effektforsynes fra et 9 V batteri gennem en modstand. Kondensatoren spærrer for DC og en modstand holder udgangen fri for jævnspænding.

Opstillingen påvirker frekvensgangen nedad ved at bassen beskæres, men grænsefrekvensen holder sig under 80 Hz, selv ved kortslutning af udgangen (under antagelse af 2 k Ω som indre modstand i mikrofonen). Ved en belastning på 1 M Ω er grænsen på 0,3 Hz.

Opadtil begrænses frekvensområdet af belastningen fra kapaciteten i mikrofonkablet og oscilloskopets kabel (begge omkring 100 pF/m) og af oscilloskopet selv (50 pF). Antages kablernes samlede længde at være 5 m bliver den capacitive belastning på 550 pF, så grænsefrekvensen bliver 150 kHz med 2 kΩ som udgangsmotstand.

I begge tilfælde er det mikrofonen der begrænser frekvensområdet.

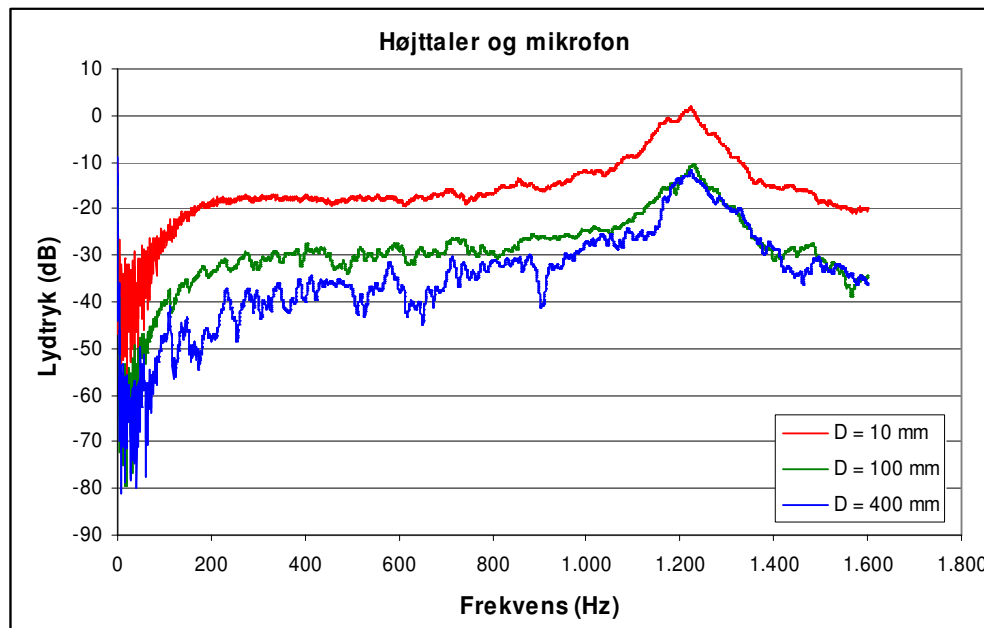
Udgangssignalet fra mikrofonen er opgivet til $S_M = 6$ mV/Pa, så for et givet signal u_M fra mikrofonen vil lydtrykket L være:

$$\left. \begin{aligned} L &= 20 \log_{10} \left(\frac{P_M}{P_{REF}} \right) \text{ dB} \\ u_M &= S_M P_M \end{aligned} \right\} \Rightarrow L = 20 \log_{10} \left(\frac{u_M}{S_M P_{REF}} \right)$$

Signalniveauet ved mikrofonen blev af målesystemet rapporteret til 30 til 100 mV (angives af Brüel & Kjær PULSE som -30 til -20 dB i forhold til 1 V) så lydtrykket i mundstykket har været over 100 dB. Det er tilstrækkeligt højt til at skjule mikrofonens støj.

3.2.4 Højtaler

Den valgte højtaler bestod af en bredbåndshøjtaler med en diameter på 110 mm i et lille lukket kabinet på 3,5 dm³, inklusive højtaleren, hvilket påvirker højtalerens reproduktion af bassen, men det er uden praktisk betydning for projektet. Lydtrykket vil falde af under højtalerens resonansfrekvens i kabinettet samt over dens øvre afskærfrekvens.



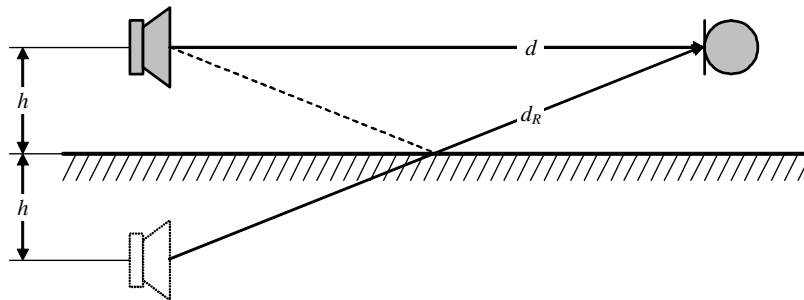
Figur 19 – Overføringskarakteristikken for højtaler og mikrofon (uden instrumentets krop) ved tre indbyrdes afstande. Højtaleren var placeret på bordet og mikrofonen ca 70 mm over bordets overflade.

Opstillingen med højtaler i kabinet og mikrofon monteret i mundstykket blev testet ved at mikrofonen blev placeret foran højtaleren i forskellige afstande og resultatet ses i Figur 19. Det væsentligste frekvensområde ligger fra 200 Hz til 1 kHz og resultatet er nogenlunde fladt

i dette område. Stigningen ved 1,2 kHz kan skyldes stående bølger i kabinettet, lige så vel som et resultat af at højttaleren bliver direktiv eller at dens membran bryder op. Afskæringen mod høje frekvenser forventes at stamme fra højttaleren, selv om det beskrevne filter ved mundstykket også kan tænkes at deltage.

Kurven for 400 mm afstand har udsving i størrelsesordenen ± 5 dB, hvilket kan skyldes interferens fra stående bølger i lokalet og refleksioner fra bordpladen. Det sidste forslag skal kort analyseres, og resultatet er, at bordet ikke påvirker frekvensgangen i det interessante frekvensområde. Interferensen fra stående bølger i rummet behandles senere.

Refleksionen fra bordet svarer til et signal fra et spejlbillede af højttaleren der forsinkes på grund af omvejen. Ved en halv bølgelængdes forsinkelse vil signalerne modvirke hinanden og give destruktiv interferens.



Figur 20 – Refleksionen fra bordpladen forsinket signalet og ved addition med det direkte signal kan der opstå destruktiv interferens afhængig af frekvensen.

Antages højttaleren for at være punktformet og placeret i samme højde over bordet som mikrofonen ($h = 70$ mm), og er afstanden fra højttaler til mikrofon d og afstanden fra spejlbillede til mikrofon d_R , bliver den laveste frekvens, hvor der kan optræde destruktiv interferens, givet ved:

$$\left. \begin{aligned} d_R &= \sqrt{d^2 + (2h)^2} \\ f &= \frac{c}{\lambda} \\ \lambda_N &= 2(d_R - d) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f_N = \frac{c}{2(d_R - d)}$$

For $d = 10$ mm bliver $f_N = 1,3$ kHz, men vejlængden fra spejlbilledet er meget større end den direkte vej, så det reflekterede signal dæmpes og vil ikke blive påvirket af refleksionen nævneværdigt. For $d = 100$ mm bliver $f_N = 2,4$ kHz og da det reflekterede signal kun er moderat dæmpet af den længere vejlængde, kan refleksionen blive synlig, men problemet vil først optræde over den højeste frekvens af interesse. For $d = 400$ mm bliver $f_N = 7,2$ kHz og det er også udenfor det interessante frekvensområde.

Konklusionen er, at refleksionen fra bordpladen kan ignoreres. Refleksionen vil forøge lydtrykket fra højttaleren med op til 6 dB for frekvenser i det interessante område, men vil ikke påvirke målingen med falske frekvenstoppe.

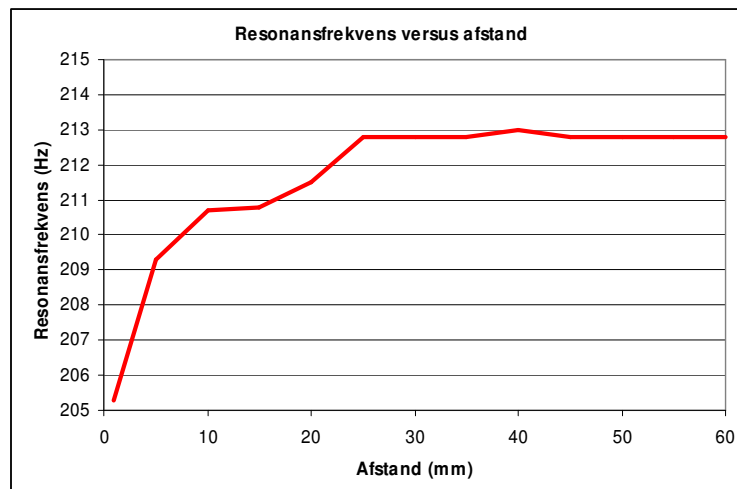
3.3 Måleserier

Analysen benytter følgende serier af målinger: (1) Det undersøges om resonansfrekvensen vil blive påvirket af højttalerens nærfelt og konklusionen er, at der skal være mindst 25 mm afstand mellem højttaler og zink. (2) De naturlige resonansfrekvenser fra A-220 til A-880 hvor zinken drives med højttaleren nær ved den brede ende af zinken. Resultatet viser noget overraskende at frekvenserne ligger ca 5 % for lavt, så opstillingen mistænkes for at påvirke resultatet. (3) Zinken drives derfor af højttaleren fra siden af instrumentet. Der er ikke den store forskel mellem målingerne, så der må konkluderes, at resonansfrekvenserne generelt ligger lavere end den spillede tone. (4) Det medfører måling af frekvenserne på den negative flanke over resonansens top, og der opnås en mindre forbedring. (5) Et forsøg på at fjerne usikkerheden ved måleopstillingen benytter et diffust felt, giver ikke noget, men interpolation over måledata bringer konklusionen noget nærmere. (6) En afsluttende måling med PU-probe gennemføres og verificerer de målte frekvenser.

Det var målet med denne analyse at vise, at instrumentet følger en middeltoneskala, hvilket ville kræve en målenøjagtighed bedre end $\pm 0,5\%$, men dette ønske kunne desværre ikke indfries. Derimod vil det blive vist, at instrumentet spilles over resonansfrekvensens top, at de naturlige resonansfrekvenser ikke følger en harmonisk række og at musikeres skal arbejde ganske meget med intonation for at spille rent.

3.3.1 Måleserie 1 – Afstand fra ende

Højttalerens nærfelt kan påvirke resonansfrekvensen i instrumentet, så målingerne indledtes med at undersøge dette forhold. Som det ses af Figur 21, hvor højttaleren driver instrumentet fra den brede ende, kræves der cirka 25 mm mellem højttaler og instrument for at kunne eliminere påvirkningen. Det svarer nogenlunde til rørets diameter i den brede ende.

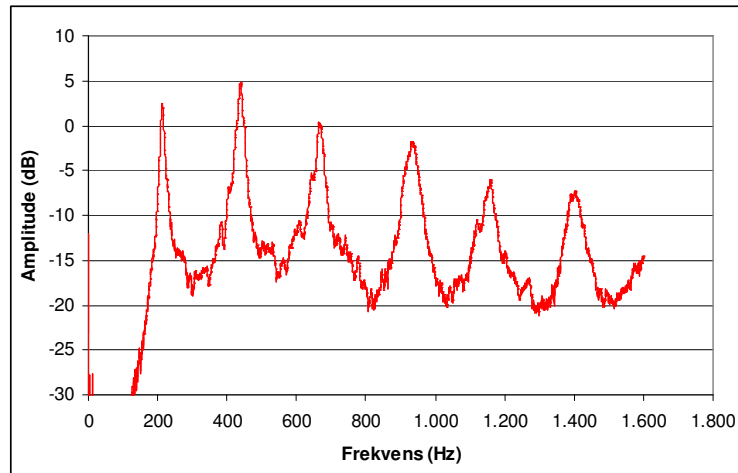


Figur 21 – Resonansfrekvensen påvirkes nedad når instrumentets åbne ende er for tæt på højttaleren. Alle huller var dækket med afdækningstape. Rørets diameter er cirka 27 mm.

3.3.2 Måleserie 2 – Højttaler ved ende

Zinkens huller blev lukket med afdækningstape, svarende til de forskellige greb (se Tabel 9). Måleserien blev udført med højttaleren 100 mm fra enden af zinken for at undgå påvirkning fra højttalerens nærfelt. En enkelt af målingerne, for den dybeste tone A-220, gengives

nedenfor; de andre målinger har et lignende udseende, blot ligger resonansfrekvenserne højere idet zinkens fingerhuller ét efter ét åbnes.



Figur 22 – Måledata for tonen A-220 (alle huller dækket) med zinken drevet af højttaleren i 100 mm afstand fra den brede ende af instrumentet.

Resonanserne ses som spidse toppe og de to første resonansfrekvenser aflæses til 213 Hz og 439 Hz. Forholdet mellem tonerne er tæt på to hvilket indikerer, at instrumentet kan gå i resonans på oktaven til grundtonen. Forholdet mellem tonerne er dog ikke præcist 2, hvilket indikerer en anden interessant egenskab ved zinken; oktaven er ikke ren.

Tabel 9 – Grebstabel. Et "X" angiver at et hul er dækket af en finger og "0" at det er åbent. A-220 og Bb-466 benytter samme greb, og G#-831 og A-880 er ikke de officielle greb.

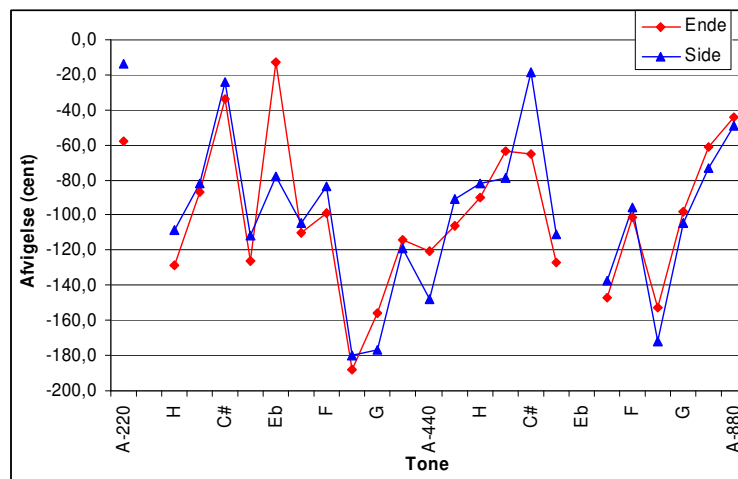
Grundtone	Overtone	Greb
A-220	Bb-466	X xxx xxx
H-247	H-494	X xxx xx0
C-262	C-523	X xxx x00
C#-277	C#-554	X xxx 0x0
D-294	D-587	X xxx 000
Eb-311	Eb-622	X xx0 x00
E-330	E-659	X xx0 000
F-349	F-698	X x0x 000
F#-370	F#-740	X x00 000
G-392	G-784	X 0x0 000
G#-415	(G#-831)	0 xx0 000
A-440	(A-880)	0 000 000

Instrumentet afstemmes til tonerne i den musikalske skala ved hjælp af fingerhullerne. Den dybeste tone opnås ved, at syv af fingrene dækker hullerne, så hele instrumentets 600 mm lange resonansdel er aktiv. Ved successivt at løfte fingrene kan resonansdelen afkortes, så den naturlige resonansfrekvens bliver højere. Den forventede tone beskrives ved dets greb, et udtryk for den kombination af huller som er enten åbne eller lukkede, og en simplificeret grebstabel er gengivet herunder. Simplifikationen består i, at et par af de højeste toner ikke er identiske med de offentliggjorte greb, men det er uden praktisk betydning for denne rapport.

De korrekte greb afviger primært derved, at grebet undertrykker andre resonansmuligheder. Simplifikationen omfatter tonerne G#-831 og A-880.

Zinken har greb indtil D-1175, men de er ret specielle og forfatterens *ambitus* omfatter ikke dette højere register, så dette område er ikke medtaget. Analysen kunne tage udgangspunkt i grebene for toner en kvint lavere, idet fx grebet for G-392 og G-784 også skal kunne give tonen D-1175; tonerne danner grundtone – oktav – kvint.

En måling er gennemført for alle tabellens greb, men kun resultatet af undersøgelsen skal vises her (rød kurve i Figur 23; den blå kurve omtales senere). Frekvenserne for grundtonen og første overtone er aflæst fra Brüel & Kjær PULSE analysatorens display og sammenholdt med den tilsvarende tone i den ligesvævende skala. Zinken kan ikke forventes at passe til den ligesvævende skala, men den er en god at sammenligne med og vil være gennemgående som reference i denne rapport.



Figur 23 – Afvigelse fra den ligesvævende skala for A-220 til A-880. Tonerne Bb-233 og Eb-622 mangler, idet der ikke findes et greb for den lave tone og det var ikke muligt at bestemme resonansfrekvensen for den høje. Kurven *Ende* har højttaleren placeret ud for instrumentets brede ende og kurven *Side* har højttaleren placeret ud for instrumentets side.

Der er en stor afvigelse mellem målingerne; fra den ”bedste” af tonerne, Eb-311 på –13 cent (–0,7 %) fra den ligesvævende skala, og til den ”værste”, F#-370 på –188 cent (–10,3 %) fra skalaen. Variationen mellem yderpunkterne er 175 cent, hvilket er næsten to halvtonettrin.

3.3.3 Måleserie 3 – Højttaler ved side

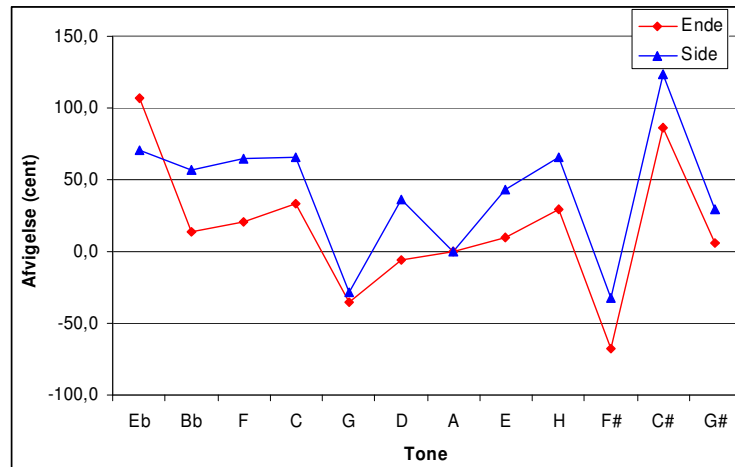
For at se om afvigelserne skyldes højttalerens placering ved den brede ende af instrumentet blev endnu en måleserie gennemført med højttaleren placeret 400 mm fra siden af zinken som vist i Figur 24. Resultatet vises som blå kurve i Figur 23.

For at forsøge at aflure lidt af zinkens intonation, er værdierne for de tolv toner i oktaven fra C-262 til H-494 gengivet i Figur 25, men denne gang arrangeret i kvintafstand og desuden er begge kurver forskudt så A-440 ligger på 0 cent for begge måleserier. Tonen A intoneres korrekt i praksis, uagtet måleværdierne på –120 cent og –150 cent, så det er ikke blot en tilfældig normering; kurverne vil give en indikation af det faktiske behov for intonation af alle toner under spil på instrumentet.



Figur 24 – Drivning af zinken fra siden af instrumentet. Afstanden mellem højttaler og zink var cirka 400 mm og afstanden til bordet cirka 70 mm.

En forsigtig tolkning af kurverne indikerer, at tonerne i den diatoniske skala C-D-E-F-G-A-H samt tonen Bb skal ligge nogenlunde korrekt, hvilket passer med forfatterens erfaring med instrumentet. Tonen F# skal ganske rigtigt hæves og tonerne Eb, C# og G# skal sænkes.



Figur 25 – Tonerne i midterområdet (oktaven C-H omkring A på 440 Hz) forskudt så begge kurver har 0 cent ved A-440. Kurven *Ende* repræsenterer højttaleren placeret ud for den brede ende af instrumentet (måleopstilling A), og kurven *Side* repræsenterer højttaleren placeret ud for siden af instrumentet (måleopstilling B).

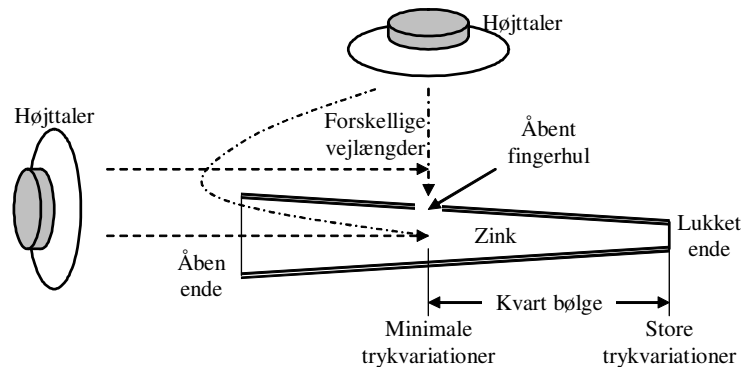
Som det ses af Figur 23 er frekvensen en funktion af måleopstillingen, hvilket ikke var ventet, og frekvensændringen er for stor til blot at kunne begrundes i tilfældigheder.

Der er tre forskellige typer greb i brug ved analysen, så det skal først undersøges det om der er en sammenhæng her.

1. Tonerne A-220 og Bb-466 har begge samme greb, med en enkelt åbning ved enden af instrumentet. Tonerne burde være ufølsomme overfor drivning fra enden eller siden, når blot højttaleren er langt nok væk. Imidlertid er frekvensen for A-220 på 212,8 Hz med højttaleren ved enden (måleopstilling A), og 218,3 Hz med højttaleren ved siden (måleopstilling B). Stigningen er 2,6 % for A-220 og 0,9 % for Bb-466.

2. Tonerne H-C-D-E-F# har et eller flere åbne huller inden den brede åbning. Lyden kan derfor komme ind i instrumentet ad to eller flere veje, så en påvirkning må forventes på grund af faseforskelle (se nedenfor). Tonens frekvens stiger fra måleopstilling A til B som H-247: 1,2 %, C-262: 0,3 %, D-294: 0,8 %, E-330: 0,3 % og F#-370: 0,5 %. Det er nogenlunde som for A-220 og Bb-466, hvilket er svært at forklare.
3. Tonerne C#, Eb, F og G har det til fælles at første åbne hul efterfølges af et lukket hul. Funktionen er, at trække tonens frekvens ned ved at forøge massen af medsvingende luft længere ude i røret. Ændringen i tonens frekvens fra måleopstilling A til B er for C#-277: 0,6 %, Eb-311: -3,7 %, F-349: 0,9 %, G-392: -1,2 % og G#-415: -0,3 %. Tonerne ændres arbitrært med måleopstillingen og følsomheden for Eb er meget stor.

Et forsøg på en forklaring tager sit udgangspunkt i at zinkens længde er betydende i forhold til bølgelængden, idet de stående bølger i røret mindst svarer til en kvart bølgelængde. Ved drivning af en resonans i røret, hvor der er mindst ét fingerhul åbent, vil resonansen have de største trykvariationer ved den lukkede ende, ved mundstykket, og de mindste trykvariationer ved hullet. Hullet giver trykudligning, og selv om trykvariationerne ikke er nul ved hullet, så er effekten af at åbne et hul tydelig.



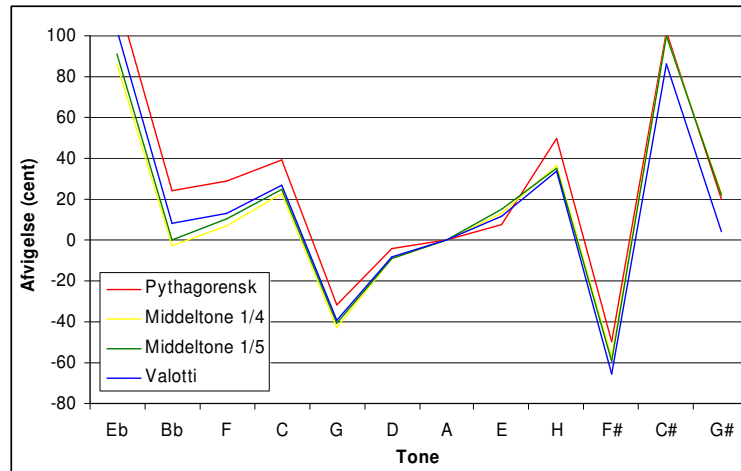
Figur 26 – Ved drivning af zinken fra enden er løbetiden til et åbent hul nogenlunde den samme for lydbølger udenfor røret som for lydbølger inde i røret. Ved drivning af zinken fra siden vil løbetiden variere.

Ved drivning fra enden vil lyden fra højttaleren nå hullet fra ydersiden på omtrent samme tid som lyden når frem til hullet fra indersiden af røret, så det ydre tryk vil kunne modvirke hullets trykudligning. Differensen mellem det indre tryk og det ydre tryk bliver næppe nul, på grund af resonansens trykopbygning, men effekten forventes at være en formindskelse af trykudligningen og dermed vil den efterfølgende masse af medsvingende luft få mere magt overfor resonansen, som derved sænkes i frekvens.

Ved drivning fra siden vil lydens vejlængde gennem enden til hullet gennem indersiden af røret være forskellig fra den direkte vej fra ydersiden. Fasen i røret vil derfor være forskellig fra fasen af den direkte lyd og det vil betyde, at reduktionen af trykudligningen ikke bliver så markant. Tonens frekvens vil godt nok sænkes, men ikke så meget som ved drivning fra enden.

Nettoresultatet ved denne antagelse er, at frekvensen skal stige når højttaleren flyttes fra enden til siden. Dette iagttages for flertallet af toner, men ikke for dem alle og heller ikke med samme relative forskydning af resonansfrekvenserne. Problemet med at give en forklaring er, at den ikke passer for de to toner hvor alle hullerne er dækket samt, at tre af tonerne påvirkes med modsat fortegn.

Målingerne med højttaleren ud for instrumentets ende virker mest tillidsvækkende, idet tonerne i den diatoniske række holdes indenfor ± 35 cent overfor tonen A. Målingerne fra denne måleopstilling skal derfor forsøges sammenholdt med de fire udvalgte skalaer fra det introducerende afsnit, for at klarlægge zinkens skalamæssige tilhørsforhold, men som Figur 27 viser, er det svært at drage en konklusion.



Figur 27 – Differensen mellem zinkens naturlige resonansfrekvenser og fire udvalgte skalaer med både zinken og skalaerne normeret efter tonen A.

Begrænses interessen til de diatoniske toner (fra F til H i figuren) er afstanden mellem de mest ekstreme toner, G og H, på 82 cent for den Pythagorenske skala, 80 cent for 1/4-komma middeltone, 76 cent for 1/5-komma middeltone og 74 cent for Valotti, og ingen af tonerne er mere end 50 cent (en halv halvtone) fra nogen af skalaens toner i det diatoniske område. En forsigtig konklusion er til fordel for 1/5-komma middeltone og Valotti.

De grove linier kan således aflæses af måledata, men det er ikke muligt at konkludere noget entydigt, om hvilken skala instrumentet stemmer efter.

Hvis målingerne er repræsentative for zinken viser de, at musikeren må justere (intonere) hver enkelt tone på plads, og det er netop den karakteristiske zinken er kendt for, men det virker lidt voldsomt, at instrumentet skulle være så langt fra idealet – zinken har trods alt været under udvikling i et par hundrede år, før dets popularitet topper i renæssancen, så man skulle tro at den relativt simple konstruktion var justeret på plads af dygtige instrumentmagere gennem senmiddelalderen og renæssancen.

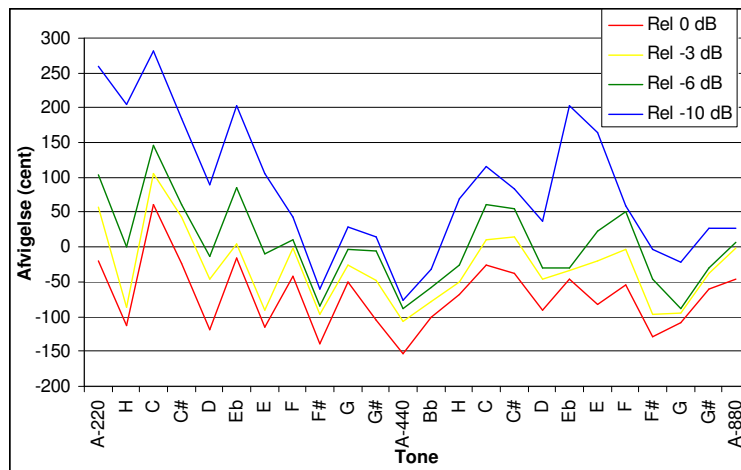
3.3.4 Måleserie 4 – Amplitude ved -3, -6 og -10 dB

Det mest åbenbare problem er resonansfrekvensernes forskydning nedad. For at finde frem til en løsning blev en blæseprøve på instrumentet udført, hvor tonerne bevidst blev intoneret ned under den korrekte frekvens, som blev målt på en frekvensanalysator¹. Erfaringen fra

¹ Det er normalt for musikere at benytte en *tuner*, der er en dedikeret frekvensanalysator, til kontrol af deres instruments intonation. Den er meget benyttet ved stemning af strengeinstrumenter, som cembalo og gambe, men også ved justering af blæseinstrumenter i sammenspil, så som blokfløjter. Tuneren modtager sit signal fra en indbygget mikrofon (eller direkte fra en elektrisk guitar) og relaterer den spillede tone til en af tonerne i den benyttede skala (fx den ligesvævende skala), og tuneren angiver derefter både den nærmeste tone i skalaen og afvigelsen indenfor ± 50 cent.

blæseprøven var dels, at tonens klang skiftede karakter en halvtone under tonen svarende til grebet, og dels, at det var meget lettere at intonere nedad end opad. En mulig fortolkning af dette er, at zinken altid spilles lidt over resonansfrekvensens top. Måske en balance mellem at musikeren løfter tonen opad og at zinken trækker tonen nedad. Hvis denne antagelse er korrekt, vil den rigtige frekvens skulle findes i en vis afstand over resonansfrekvensens top.

Måleserien bestod derfor i, at måle frekvensen af ikke blot selve toppen af resonansen, men også for frekvenser over denne. Det blev valgt at måle fire frekvenser, svarende til niveauerne for 0, -3, -6 og -10 dB, regnet fra resonansens top. Resultatet fremgår af Figur 28, hvor det ses, at der stadig er stor variation i forhold til den ligesvævende skala. Differensen mellem højeste og laveste tone er 214 cent for 0 dB, 211 cent for -3 dB, 234 cent for -6 dB og hele 343 cent for -10 dB.

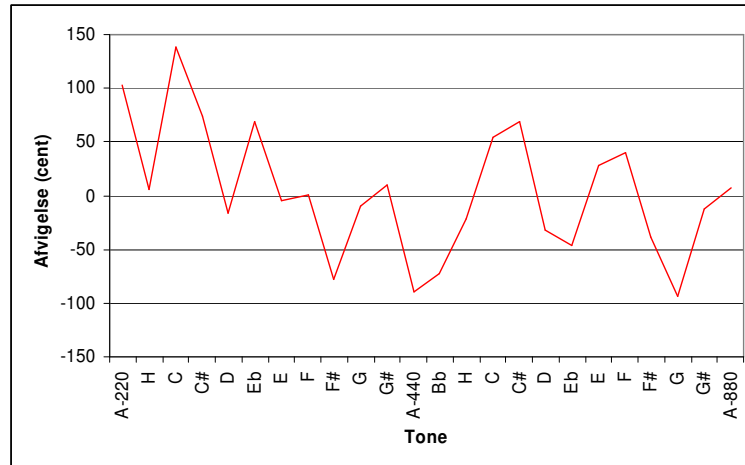


Figur 28 – Måling af resonansfrekvenserne med drivning af zinkens brede ende med højttaleren 100 mm fra åbningen. Kurven 0 dB repræsenterer resonansens topværdi og kurverne for -3 dB, -6 dB og -10 dB er måldata for frekvenser over resonansen.

En gennemsnitsværdi af forskydningen er på -70 cent for 0 dB, -31 cent for -3 dB, -4 cent for -6 dB og 84 cent for -10 dB. Det kunne fortolkes som om zinken under spillet intoneres til -6 dB punktet hvor den gennemsnitlige forskydning nedad er næsten nul. Et forsøg på at korrigere -6 dB kurven for 1/5-komma middeltoneskalaens variation i forhold til den ligesvævende skala er vist i figuren herunder.

De dybeste toner A, H og C# skal faktisk intoneres ganske meget ned, så de store værdier for disse toner kan godt være korrekte. Området fra D-294 til A-880 varierer stadigvæk meget, selv om det er korrekt, at C, C# og Eb (begge oktaver) generelt ligger ret højt og derfor skal intoneres ned af musikeren.

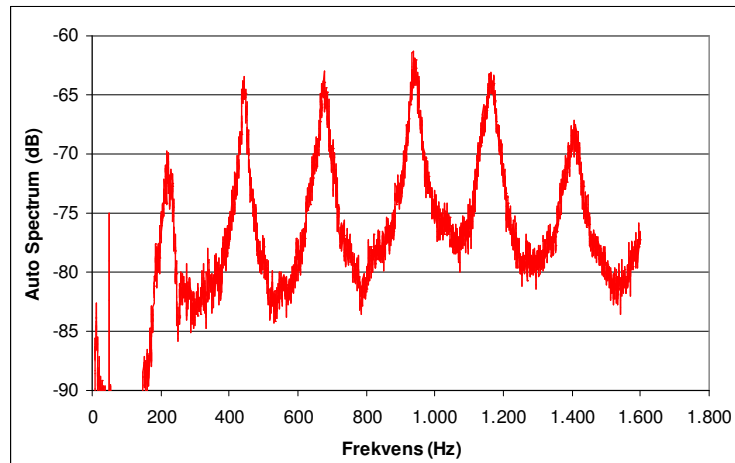
Ved måleserien var Brüel & Kjær instrumentet sat til at benytte gennemsnitsværdien af 1000 målinger i et forsøg på at udjævne usikkerheden på grund af ukorreleerede fejlkilder. Der var dog ingen betydende forskel på denne eller tidligere måleserie, så målingerne må være generet af fejlkilder, der er korreleerede til højttalerens signal, så som stående bølger i rummet.



Figur 29 – Frekvensværdier for –6 dB punktet korrigeret for 1/5-komma middeltone.

3.3.5 Måleserie 5 - Fritfelt

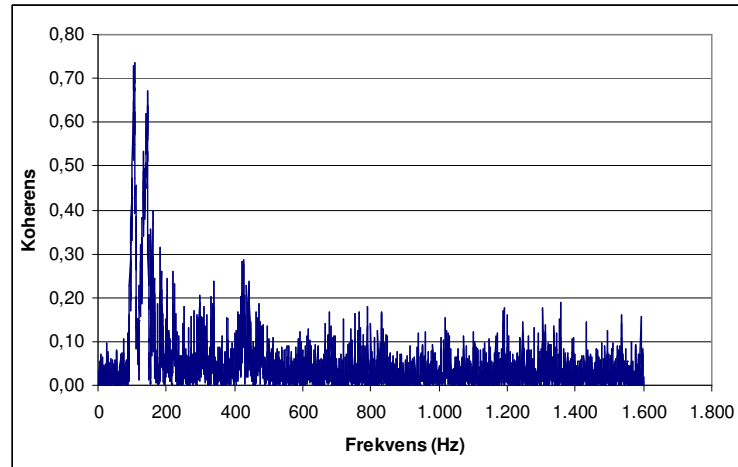
Som et forsøg på at mindske indflydelsen fra stående bølger i rummet blev zinken langsomt ført rundt i rummet og der blev benyttet gennemsnit over 500 måleværdier. Mindste afstand til højttaleren var 0,75 m og zinken kom ikke nærmere ved væg, gulv eller loft end 0,5 m.



Figur 30 – Autospektrum for zinken tone A-220.

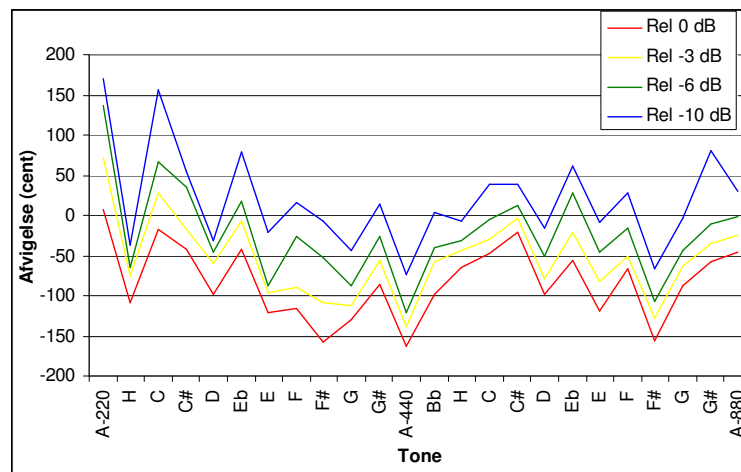
Et eksempel på en måling vises i Figur 30, der gengiver et autospektrum for tonen A-220. Autospektret blev foretrukket, da det ved denne måling var lettere at finde maksimum for resonanserne, frem for det frekvensspektrum, som har været benyttet ved hidtidige måleserier.

Et udtryk for at målingen rent faktisk benyttede et frit felt, og således ikke er for kraftigt relateret til stående bølger i rummet, findes ved Figur 31, der repræsenterer kohærens for målingen. En høj kohærens betyder, at der er nær kobling mellem højttalersignalet fase og det målte signals fase, så værdien skal være så nær nul som muligt for denne måleserie.



Figur 31 – Korrelationen mellem højttalerens signal og det målte signal, for zinkens A-220.

Som ved de tidligere måleserier er målinger gennemført for alle greb fra A-220 til A-880 og resultatet vises i Figur 32.



Figur 32 – Måling af resonansfrekvenserne med diffust lydfelt hvor kurven for 0 dB repræsenterer resonansfrekvensens top og de øvrige kurver frekvensen over resonans ved de angivne niveaufald på -3 dB, -6 dB og -10 dB i forhold til toppunktets værdi.

Ændringen i forhold til tidligere måleserie er ganske minimal: Kurven for -3 dB har 210 cent variation, og kurven for -6 dB har 257 cent variation.

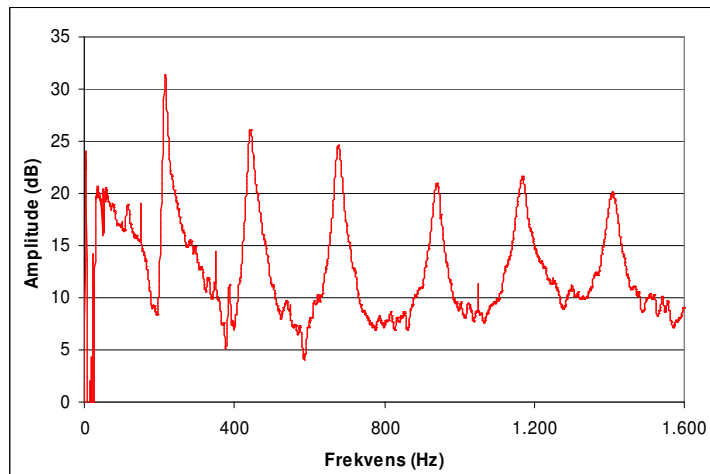
3.3.6 Måleserie 6 – PU-probe

Projektets vejleder foreslog en bestemmelse af resonansfrekvenserne ved en impedansmåling, som skulle give en mere præcis bestemmelse af hvor resonansfrekvenserne var placeret. Det viste sig at holde stik, idet kurven var mere regulær end de tidligere måleserier, hvor toppen kunne være meget svær at finde. Målingen viste dog også, at måleprincippet er begrænset til de to dybeste toner, idet det ikke var muligt at erkende de højere liggende resonansfrekvenser.

PU-proben fra Microflown Technologies består af en mikrofon for måling af lydtryk og tre varmetråde for bestemmelse af luftens hastighed i de tre koordinater. Ved denne undersøgelse

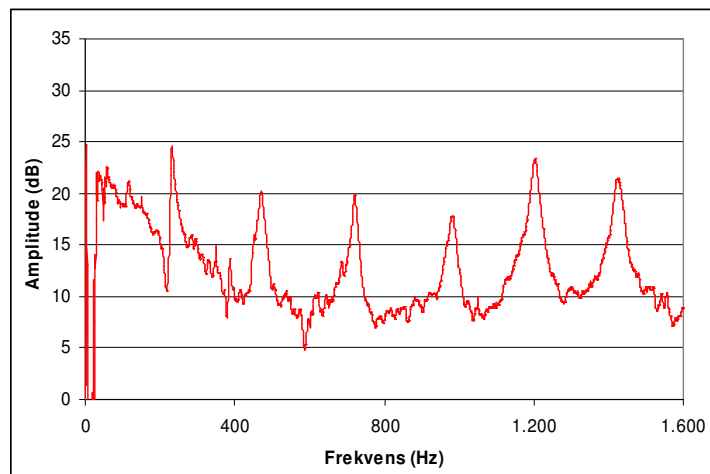
blev kun den ene af akserne benyttet, så PU-proben blev drejet for at maksimere udgangssignalet.

Ved måling af A-220 er alle fingerhuller dækket, så der er kun adgang til resonansdelen gennem den store åbning i enden af instrumentet. Resonansfrekvenserne er tydeligt markeret.



Figur 33 – Måling på zinkens A-220 med PU-proben ved zinkens brede ende.

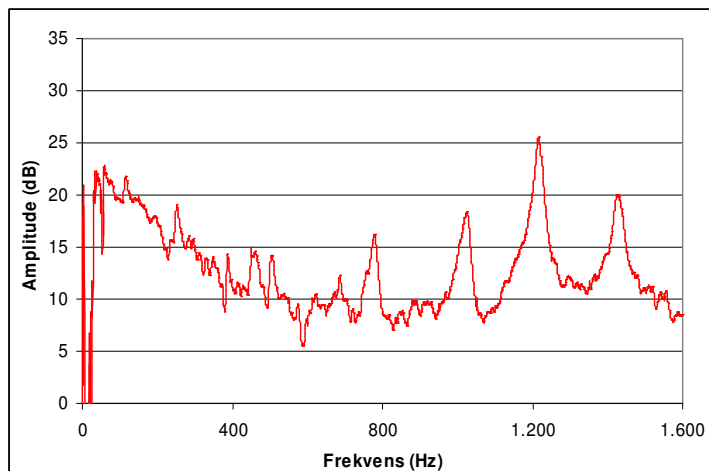
Ved måling af H-247 er det nederste fingerhul åbnet og der er derfor adgang til resonansdelen gennem to veje. Det er tydeligt, at resonanserne er mindre markerede i billedet.



Figur 34 – Måling på zinkens H-247 med PU-proben ved zinkens brede ende.

Den sidste del af zinken, fra det åbne fingerhul til enden, er 136 mm langt, hvilket svarer til en halvbølge omkring 1,3 kHz, og det kan muligvis forklare stigning i amplitude. Ved den halve frekvens, 650 Hz, skal røret svinge på en kvart bølgelængde, men da røret er åbent i begge ender er resonans en umulighed ved denne frekvens. Det kan forklare, at niveauet generelt falder med centrum omkring denne frekvens, men dette emne er ikke undersøgt yderligere.

Ved måling af C-262 er de to nederste fingerhuller åbne og der er derfor adgang til resonansdelen gennem tre veje. Resultatet er en udtværing af især grundresonansen, som nok kan ses, men ikke længere træder tydeligt frem.



Figur 35 – Måling på zinkens C-262 med PU-proben ved zinkens brede ende.

Stigningen i amplitude omkring 1,2 kHz kan igen (måske) forklares ud fra den sidste del af zinken på 136 mm, idet denne del er væsentlig længere end stykkerne mellem fingerhullerne (cirka 45 mm), hvor halvbølgeresonansen ligger i nærheden af 4 kHz.

Ved start af projektet var en lignende måleopstilling foreslået, dog med en almindelig mikrofon i stedet for PU-proben. Det er interessant, at selv med en PU-probe kan tonerne fra C-262 og op vanskeligt erkendes, så målemetoden ville ikke have været tilstrækkelig.

3.4 Naturlige resonanser

Resultatet af måleserierne vises i tabellerne nedenfor. I den første tabel sammenlignes målingerne for de diatoniske toner fra A-220 til A-440 og gennemsnittet af målingerne er angivet, med den beregnede spredning for målinger med tre eller flere værdier (foretaget på lommeregneren HP15C som $\bar{x} \pm s$). Sidste kolonne angiver tonens afvigelse fra referencen (den ligesvævende skala med A på 440 Hz). Den gennemsnitlige afvigelse er -98 cent med 142 cent mellem højeste og laveste tone.

Tabel 10 – Sammenfatning af måleværdier for skalatoner ved måleserie 2 til 6 (hertz). Kolonne Ende og Side angiver højttalerens placering i forhold til zinken, Fritfelt angiver tilfældig indfaldsvinkel og PU-Probe angiver måling via impedansen ved åbningen.

Tone	Greb	2 Ende	3 Side	4 Ende	5 Fritfelt	6 PU	Snit af 2-6	LS
A	X xxx xxx	212,8	218,3	217,5	220,8	216,0	217,1 ± 3,0	-23 cent
H	X xxx xx0	229,3	232,0	231,3	232,0	232,5	231,4 ± 1,3	-113 cent
C	X xxx x00	248,8	249,5	271,0	259,0	252,0	256,0 ± 9,3	-38 cent
D	X xxx 000	273,0	275,3	274,0	277,5	-	275,0 ± 1,9	-114 cent
E	X xx0 000	309,3	310,3	308,5	307,5	-	308,9 ± 1,2	-112 cent
F	X x0x 000	329,8	332,8	341,0	326,5	-	332,5 ± 6,2	-85 cent
G	X 0x0 000	358,3	354,0	349,8	363,5	-	356,4 ± 5,9	-165 cent
A	0 000 000	410,5	415,0	402,8	400,5	-	407,2 ± 6,7	-134 cent

Alle værdier svinger frem og tilbage omkring gennemsnittet, så der er ikke en klar konklusion til fordel for den ene eller anden målemetode. Største spredning er ±3,6 % for tonen C-262.

Nedenfor vises resultatet af måling på A-220, hvor op til sjette resonans er målt. Spredningen i måleværdierne er ±1,4 % for grundtonen og mindre for de højere liggende resonanser, hvilket er for stort til at indfri ønsket fra afsnit 2.6.10 om at måle indenfor ±0,5 %. Der skal en bedre måleopstilling til for at nå dette krav. Formodentlig vil det være påkrævet, at drive zinken fra en høj impedans gennem mundstykket og måle udgangssignalet.

Tabel 11 – Sammenfatning af måleværdier for A-220 ved måleserie 2 til 6 (hertz). Kolonne Ende og Side angiver højttalerens placering i forhold til zinken, Fritfelt angiver tilfældig indfaldsvinkel og PU-Probe angiver måling af impedansen ved åbningen.

Tone	2 Ende	3 Side	4 Ende	5 Fritfelt	6 PU	Snit af 2-6
Frekvens 1	212,8	218,3	217,5	220,8	216,0	217,1 ± 3,0
Frekvens 2	438,5	442,3	440,0	440,5	443,0	440,9 ± 1,8
Frekvens 3	665,8	677,8	681,0	676,3	678,5	675,9 ± 5,9
Frekvens 4	932,5	-	-	935,0	941,0	936,2 ± 4,4
Frekvens 5	1159	-	-	-	1171	1165
Frekvens 6	-	-	-	-	1408	1408

Resonanserne er nedenfor relateret til den målte grundtone for hver enkelt måleserie. På nær måleserie 5, hvor der blev benyttet at frit felt, angiver alle målinger at anden resonansfrekvens ligger højere end 2 gange laveste resonansfrekvens.

Tabel 12 – Sammenfatning af måleværdier for A-220 ved måleserie 2 til 6. Kolonne *Ende* og *Side* angiver højttalerens placering i forhold til zinken, *Fritfelt* angiver tilfældig indfaldsvinkel og *PU-Probe* angiver måling af impedansen ved åbningen.

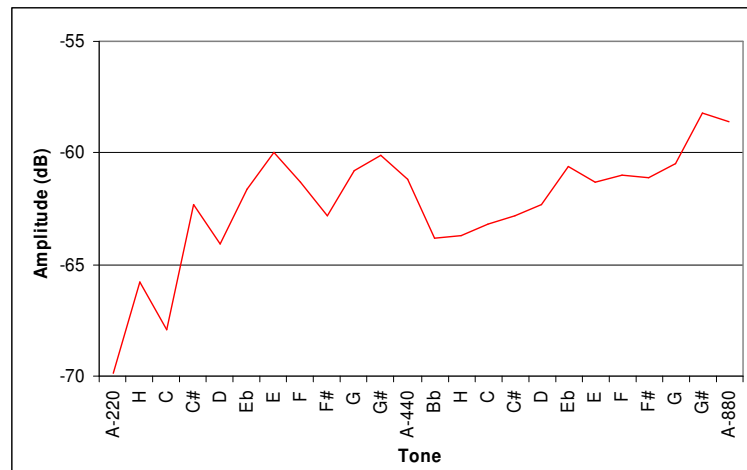
Tone	2 Ende	3 Side	4 Ende	5 Fritfelt	6 PU	Snit af 2-6
Frekvens 1	1	1	1	1	1	1
Frekvens 2	2,0606	2,0261	2,0230	1,9950	2,0509	2,03 ± 0,03
Frekvens 3	3,1288	3,0591	3,1310	3,0630	3,1412	3,10 ± 0,04
Frekvens 4	4,3820	-	-	4,2346	4,3565	4,32 ± 0,08
Frekvens 5	5,4464	-	-	-	5,4213	5,43
Frekvens 6	-	-	-	-	6,5185	6,52

Det generelle billede er, at den harmoniske række: 1, 2, 3, 4, 5,... ikke er gyldig for den koniske resonansdels naturlige frekvenser; alle frekvenser ligger cirka 10 % højere end den frekvens der svarer til rækken. Denne antagelse bekræftes senere i det teoretiske afsnit.

3.5 Interpolation

En opsummering af erfaringen fra måleserien viser, at zinken med stor sandsynlighed spilles cirka en halvtone (100 cent) over den naturlige resonansfrekvens, samt at der er en stor variation gennem de to oktaver som analysen dækker.

Indtil nu har det været forudsat, at amplituden af udgangssignalet fra zinken var det samme for alle toner, men det er ikke nødvendigvis tilfældet. Som Figur 36 antyder, kan der være en ganske betydelig variation over de analyserede to oktaver. Her er amplituden af de to laveste resonanser vist som funktion af den spillede tone og variationen er 15 dB, svarende til cirka 0,65 dB for hvert tonetrin, hvis udviklingen var retliniet.



Figur 36 – Amplituden af grundtonen udtrykt som amplituden af første resonans fra A-220 til A-440 og amplituden af anden resonans fra Bb-446 til A-880.

Kurven repræsenterer amplituden af det spillede under to forudsætninger; dels, at musikeren leverer samme indgangsniveau til zinken for alle toner, og dels, at målemetoden tillader brug af måleværdierne for resonansernes amplitude – og ikke blot af resonansens frekvens som alle tidligere beregninger har været baseret på. Det antages simpelthen, at musikeren er en perfekt lydgenerator, at det diffuse lydfelt har konstant amplitude og at mikrofonens følsomhed er uafhængig af frekvensen.

Variationen på 15 dB er ret stor; audiologisk set svarer det til halvanden gange fordobling af hørestyrken, så der skal knyttes nogle kommentarer til kurven. Det pludselige fald over A-440 genkendes fra forfatterens erfaring med instrumentet, idet der kræves en ekstra indsats for at spille i det høje register. Faldet under E-330 kan relateres til et tydeligt klangskift ved tonerne fra C-262 og ned. Desuden er de dybeste toner noget svagere, så de vil typisk blive blæst noget kraftigere, og det medfører så det omtalte skift i klangfarven.

En mulig tolkning er, at zinken ikke blot spilles på et relativt niveau regnet fra resonansens amplitude ved toppen, men måske snarere på et absolut niveau, fx på -70 dB. Det vil betyde at musikeren må kompensere for instrumentets variation i resonansernes amplitude; musikeren vil derfor skulle benytte en frekvens nær resonansens top for de ”svage” resonanser og intonerer højere end resonansens top for de ”kraftige” resonanser. Antagelsen er derfor, at musikeren benytter den skrå hældning over resonansens top til at korrigere niveauet på plads.

3.5.1 Teori

For at teste denne idé, er der behov for at bestemme frekvensen for en given amplitude, hvor måledata giver amplituden for en given frekvens. Det er følgelig nødvendigt at interpolere mellem måledata, og her vælges en parabolisk interpolation baseret på værdierne for de tre høje punkter. Den paraboliske repræsentation af data er valgt for bedre at repræsentere den krumme top af resonansen og de næsten lige flanker. At det kun er de tre højeste amplitudeværdier, der benyttes, skyldes en vurdering af, at måledata for -10 dB punktet er meget usikker og derfor vil blive kasseret.

Kaldes måledata m_d , hvor d repræsenterer 0 dB, -3 dB eller -6 dB punktet, bliver ligningen bag den paraboliske interpolation, som skal beskrive sammenhængen mellem måledata og frekvensen f , givet ved:

$$m = af^2 + bf + c$$

Parablen skal ideelt gå igennem måledata og have vandret tangent for toppunktet, så der kan opstilles følgende krav for bestemmelse af ligningens koefficienter:

$$m_0 = af_0^2 + bf_0 + c$$

$$m_3 = af_3^2 + bf_3 + c$$

$$m_6 = af_6^2 + bf_6 + c$$

$$\frac{dm_0}{df} = 0 \Rightarrow 2af_0 + b = 0$$

Der er fire krav, hvilket er ét for meget til at definere de tre koefficienter for en parabel, så det vælges at benytte de to krav for 0 dB punktet og at kombinere -3 dB og -6 dB punkterne ved at benytte et gennemsnit af den fundne værdi for koefficienterne.

Af første og sidste krav haves koefficienterne b og c som funktion af måledata og frekvensen og med koefficienten a som parameter:

$$b = -2af_0$$

$$c = m_0 - af_0^2 - bf_0$$

Ved subtraktion af første og andet krav og udnyttelse af udtrykket for koefficienten b , findes en beregning af koefficienten a :

$$\left. \begin{array}{l} m_3 - m_0 = af_3^2 - af_0^2 + bf_3 - bf_0 \\ b = -2af_0 \end{array} \right\} \Rightarrow m_3 - m_0 = af_3^2 - af_0^2 - 2af_0f_3 + 2af_0^2 \Rightarrow$$

$$a = \frac{m_3 - m_0}{f_3^2 + f_0^2 - 2f_3f_0}$$

Et tilsvarende resultat findes for -6 dB punktet ved at erstatte indeks "3" med "6".

Måledata m_0 skal aflæses fra måleserien hvorimod m_3 og m_6 kan afledes fra m_0 og derfor ikke behøver opslag, eksempelvis er m_3 givet ved differensen $m_0 - 3$ dB, så differensen $m_3 - m_0$ bliver lig med -3 dB og tilsvarende bliver $m_6 - m_0$ lig med -6 dB. Differenserne i tælleren af udtrykket for a er derfor kendte og kun koefficient c behøver relation til amplitudens måledata.

Koefficienten a kan beregnes direkte af foregående, hvis måledata for enten m_3 eller m_6 bliver kasseret. Her vælges at benytte begge målinger, som kombineres ved et simpelt gennemsnit:

$$a = -\frac{\frac{3}{f_3^2 + f_0^2 - 2f_3f_0} + \frac{6}{f_6^2 + f_0^2 - 2f_6f_0}}{2}$$

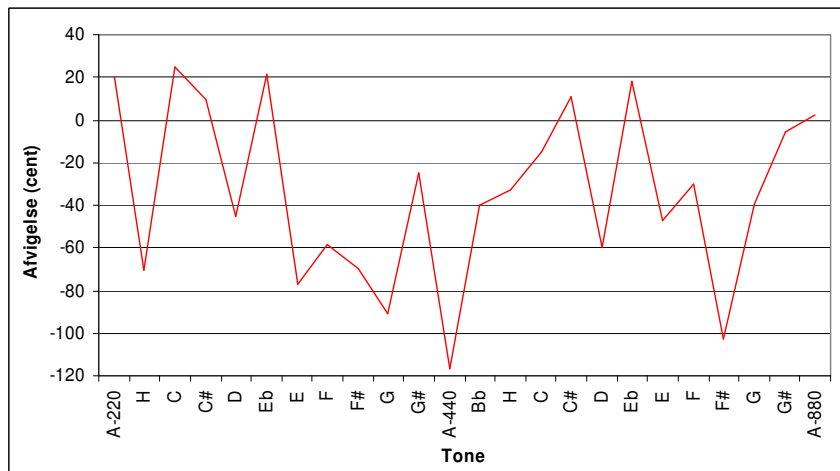
Løsningen til anden grads ligningen for m giver en frekvens som svar på et givet niveau m , og løsningen til ligningen findes fra definitionen af en anden grads lignings rødder, hvor det iagttages, at sidste led er $c - m$. Herved findes:

$$f_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - m)}}{2a}$$

Koefficienterne a og c er begge negative, så b er positiv, og den øvre skæringsfrekvens findes derfor for ”minus kvadratroden”. Den nedre skæringsfrekvens er uden interesse, og der er ingen løsning for et negativt argument til kvadratroden.

3.5.2 Fast amplitude

Resultatet af analysen er vist nedenfor, hvor alle toner spilles på et fast niveau på -70 dB relativt til måleopstillingens niveau. Det svarer til -15 dB i forhold til den kraftigste resonans. Variationen overfor den ligesvævende skala er 142 cent, svarende til knapt halvanden halvtone og det er stadig en hel del. Enkelte toner skal sænkes, mens hovedparten skal hæves, så det begynder dog at ligne den intonation man, som musiker, udsættes for ved spil på instrumentet.

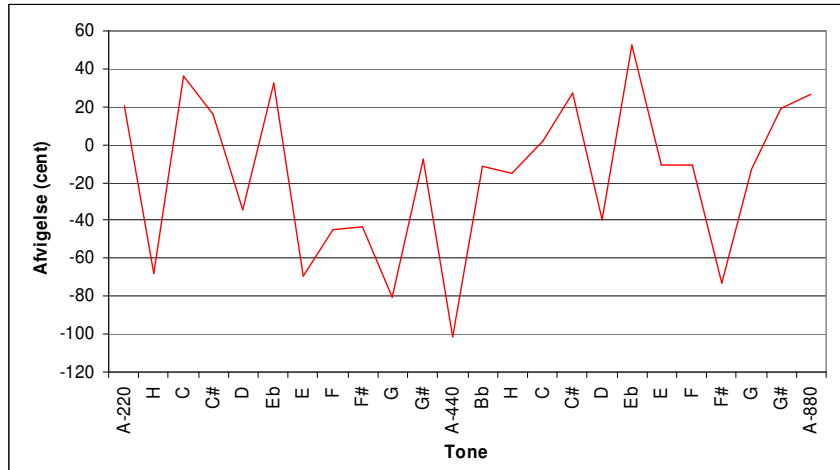


Figur 37 – Afvigelse fra den ligesvævende skala for zinken spillet på et fast niveau på -70 dB af måledata.

Specielt bemærkes, at C-262, C#-277, Eb-311, C-523, C#-554 og Eb-622 ligger højt samt at F#-740 ligger lavt, hvilket passer med erfaringen. At A-440 skal hæves mere end en halvtone, kan derimod undre noget, men forfatterens erfaring er, at det tog ganske lang tid med spil på instrumentet før den tone faldt på plads, så måske repræsenterer kurven rent faktisk zinkens intonation – eller mangel på samme. At tonen A-440 i praksis er en af de mere stabile og lettest reproducerbare toner, kan dog godt undre lidt når man ser kurven.

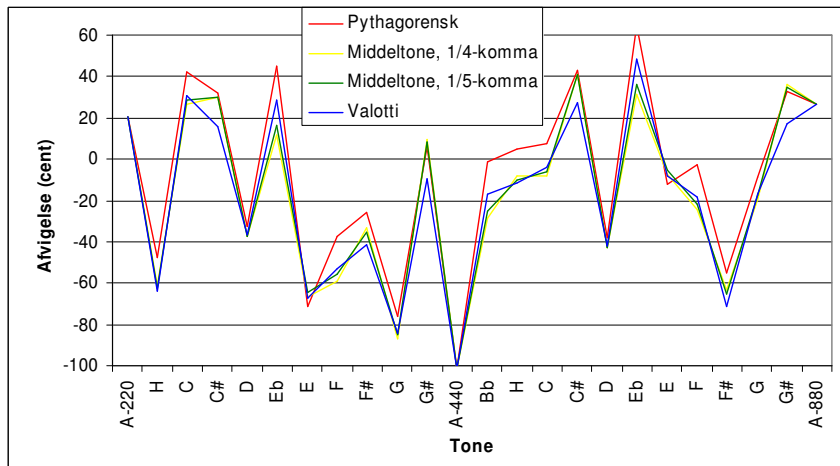
3.5.3 Variabel amplitude

Frem for et konstant niveau, som anvendt ved analysen ovenfor, kan niveauet også være afhængig af tonens frekvens. Nedenfor vises et eksempel, hvor niveauet falder 0,65 dB per tone, det giver en variation på 15 dB gennem skalaen og kompenserer derved for den tidligere omtalte styrkevariation.



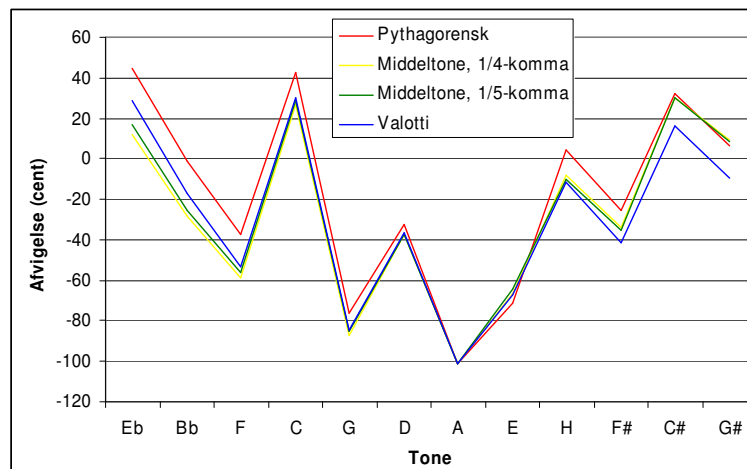
Figur 38 - Afvigelse fra den ligesvævende skala for zinken spillet på et variabelt niveau stigende fra -70 dB ved A-220 til -86 dB ved A-880 af måledata.

Der er ikke voldsom forskel mellem eksemplerne; variationen er faktisk 12 cent større med 154 cent fra laveste til højeste afvigelse, men bemærkningerne fra før er stadig gyldige. Nedenfor sammenlignes resultatet med de fire skalaer fra det introducerende afsnit, men der er ikke nogen klar favorit.



Figur 39 – Afvigelse fra de historiske skalaer for et niveau der stiger 15 dB gennem de to oktavers område (samme indstilling som ved tidligere kurve).

Tonerne i oktaven C-262 til H-494 er arrangeret i kvintafstand i figuren nedenfor for bedre at kunne vurdere afvigelsen for toner i den diatoniske skala. Der er store afvigelser, selv i midten af den diatoniske skala (området fra F til H), så påstanden fra producenten af instrumentet om, at instrumentet står i middeltone, kan ikke valideres ud fra denne analyse.



Figur 40 – Afvigelse af tonerne C-262 til H-494 fra de historiske skalaer for et niveau der stiger 15 dB gennem de to oktavers område (samme indstilling som ved tidligere kurve).

Alt i alt må det konkluderes, at der er en rimelig support for den oplevelse, man som musiker har med instrumentet – at det er vanskeligt at spille rent på. Der er desuden en god korrelation mellem de toner der opfattes som høje eller lave og med analysens angivelse af højt og lavt liggende resonanser.

Målingerne antyder, at zinken spilles cirka en halvtone over den naturlige resonansfrekvens, og da der er store variationer mellem tonerne, må musikeren derfor lære sig intonationen af hver enkelt tone. Det forklarer hvorfor det tager begynderen så lang tid overhovedet at kunne spille en blot nogenlunde ren C-dur skala; beherskelsen af instrumentet skal ganske enkelt trænes ind.

4 Teori

I dette kapitel gennemføres beregning af zinkens resonanser ved at opstille bølgeligningen for instrumentet. I første omgang er analysen baseret på en cylindrisk model, men resultatet er ikke tilfredsstillende, dels fordi frekvensen af grundtonen er for lav, og dels fordi modellen ikke tillader instrumentet at gå i resonans på oktaven over grundtonen. Derfor udvides modellen til konisk form hvor resultatet stemmer bedre overens med måleafsnittets resultater.

Afsnittet inkluderer et studie af, hvordan resonansfrekvenserne varierer når røret ændres fra et cylindrisk rør til et konisk rør og desuden studeres zinkens overtonestruktur.

4.1 Baggrund

I denne rapport forudsættes det, at problemerne kan beskrives som et produkt af funktioner, der hver for sig kun afhænger af en enkelt variabel, svarende til koordinatsystemets akser, og der vil kun blive givet stationære løsninger til problemerne. Det antages med andre ord, at de behandlede systemer er lineære, så superpositionsprincippet gælder, og at de transiente forhold efter ansatsen har haft tid nok til at klinge ud, så analysen kan begrænses til harmoniske svingninger med en given amplitude og fase.

4.1.1 Bølgeligningen

Bølgeligningen for hastighedspotentialet Φ , samt definitionerne for lydtrykket p og partikkelhastigheden u , er givet ved (Rasmussen, side 1 og 2):

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \\ p &= \rho \frac{\partial\Phi}{\partial t} \\ u &= -\nabla\Phi\end{aligned}$$

Lydens hastighed c antager værdien 343 m/s i luft, luftens massefylde ρ er på 1,2 kg/m³ og ∇ er Laplace operatoren for det aktuelle koordinatsystem, som defineres nedenfor.

Løsningen vil blive baseret på separation af variable (Bernoullis metode) og vil udelukkende benytte to variable: en positionsvariabel (z eller r), og en tidsafhængig variabel (t). Vælges det eksempelvis at repræsentere løsningen ved X , som er en funktion af koordinaten x , kan hastighedspotentialet formuleres som:

$$\Phi = X(x)\exp(i\omega t)$$

Opgaven består da i, at bestemme et udtryk for funktionen X . Indsættes udtrykket i den ovenstående bølgeligning, og udnyttes det, at X ikke afhænger af tiden, findes:

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\omega^2}{c^2} X(x)\exp(i\omega t)$$

Introduceres bølgetallet k , kan bølgeligningen udtrykkes som:

$$\nabla^2\Phi + k^2\Phi = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}$$

Der er ikke her taget stilling til det valgte koordinatsystem; kun at lydfeltet kan beskrives ved funktionen X . I de følgende analyser vil der blive benyttet dels et cylindrisk koordinatsystem og dels et sfærisk koordinatsystem, hvilket påvirker definitionen af $\nabla^2\Phi$. I et retvinklet koordinatsystem beskrives et punkt ved de tre akser x , y og z . I et cylindrisk koordinatsystem beskrives et punkt ved radius r og positionen z samt drejningsvinklen φ om z -aksen. I et sfærisk koordinatsystem beskrives et punkt ved længden r og drejningsvinklerne θ fra z -aksen og φ omkring z -aksen.

Definitionerne for de Rektangulære, Cylindriske og Sfæriske koordinatsystemer lyder:

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi_R &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \\ \nabla^2\Phi_C &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \\ \nabla^2\Phi_S &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \cot(\theta) \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} \right)\end{aligned}$$

Udtrykkene er ret komplicerede og simplifikationer indføres for, at kunne undertrykke de mere barske led. Eksempelvis kan symmetri om en af akserne benyttes til at eliminere det led der angiver drejning om akse. Eksempelvis er den afledede af hastighedspotentialet nul, når der ikke er afhængighed af drejningsvinklen φ .

4.1.2 Lydtryk

Lydtrykket p er en skalar med dimensionen Pa/m² og kan bestemmes som:

$$p = \rho \frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

Benyttes den tidligere definition af hastighedspotentialet, $\Phi = X(x)\exp(i\omega t)$, findes:

$$p = \rho \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \{X(x)\exp(i\omega t)\} = i\omega\rho X(x)\exp(i\omega t) = \underline{\underline{ik\rho c X(x)\exp(i\omega t)}}$$

Udtrykket har den samme grundlæggende karakter som hastighedspotentialet, der er blot en (frekvensafhængig) konstant $ik\rho c$ til forskel. Den imaginære enhed i angiver at lydtrykket tidsmæssigt er 90° foran hastighedspotentialet. Udtrykket tillader, at relationen mellem lydtrykket og hastighedspotentialet skrives som:

$$p = ik\rho c\Phi$$

I denne ligning angiver koefficienten $\rho c = 412 \text{ kg/m}^2\text{s}$ luftens karakteristiske impedans. Det ses desuden, at det er muligt at erstatte hastighedspotentialet i bølgeligningen med trykket p , hvorved bølgeligningen bliver:

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi + k^2\Phi &= 0 \Rightarrow \\ \nabla^2 \frac{p}{ik\rho c} + k^2 \frac{p}{ik\rho c} &= 0 \Rightarrow \\ \nabla^2 p + k^2 p &= 0\end{aligned}$$

Denne form af bølgeligningen vil blive benyttet i de følgende afsnit.

4.1.3 Partikkelhastighed

Partikkelhastigheden u er en vektor med dimensionen m/s, og er defineret ved gradienten af hastighedspotentialet, som:

$$u = -\nabla\Phi$$

Partikkelhastigheden kræver kendskab til koordinatsystemet (Rasmussen, side 4):

$$\begin{aligned}\nabla\Phi_R &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) \\ \nabla\Phi_S &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}, \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) \\ \nabla\Phi_S &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \frac{1}{r\sin(\theta)} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \right)\end{aligned}$$

Udtrykkene er vektorielle, men i denne rapport vil kun problemer med én dimension blive analyseret, hvilket muliggør en simplifikation. For et problem, som er formuleret udelukkende som funktion af positionen x i et rektangulært koordinatsystem vil partikkelhastigheden blive:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\nabla\Phi \\ u &= u(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \{X(x)\exp(i\omega t)\} = -\frac{\partial X(x)}{\partial x} \exp(i\omega t)$$

Det er forudsat, at hastighedspotentialet igen er givet ved $X(x)\exp(i\omega t)$. Partikkelhastigheden er således en positionsafhængig afledet af funktionen X i punktet x , og partikkelhastigheden er i modfase med hastighedspotentialet, så lydtrykket er 90° bagud.

Fra den ovenstående udledning af trykket kan X bestemmes, og ved indsættelse i udtrykket for partikkelhastigheden, findes:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= -\frac{\partial X(x)}{\partial x} \exp(i\omega t) \\ X(x) &= \frac{p}{i\omega\rho \exp(it)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{p}{i\omega\rho \exp(i\omega t)} \right\} \exp(i\omega t) = \frac{i}{\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{i}{k\rho c} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Partikkelhastigheden er lig med den afledede af lydtrykket med hensyn til positionen, er 90° foran lydtrykket og skal skaleres med den (frekvensafhængige) konstant $1/k\rho c$.

4.1.4 Impedans

Impedansen af et lydfelt er defineret ud fra lydtrykket p , partikkelhastigheden u og tværsnitsarealet S af en flade vinkelret på lydfeltets udbredelse:

$$Z_A(x) = \frac{p}{uS} = \frac{i\omega\rho X(x)\exp(i\omega t)}{-S \frac{\partial X(x)}{\partial x} \exp(i\omega t)} = -\frac{i\omega\rho}{S} \frac{X(x)}{X'(x)} = -\frac{ik\rho c}{S} \frac{X(x)}{X'(x)}$$

Når funktionen X kendes kan impedansen beregnes. Nedenfor gives et eksempel der tager udgangspunkt i den senere beregning af resonanserne for en cylindrisk resonansdel.

4.1.5 Cylindrisk resonansdel

I afsnittet med den cylindriske model findes en løsning for trykket i et cylindrisk rør som funktion af positionen x . Røret er lukket ved $z = 0$ og åbent (trykudligning) ved $z = L$. Resultatet vises i afsnittet, at være givet ved funktionen:

$$Z(z) = A \cos(kz)$$

Den akustiske impedans for lydbølgen i positionen z er:

$$Z_A(z) = -\frac{i\omega\rho}{S} \frac{Z(z)}{Z'(z)} = -\frac{i\omega\rho}{S} \frac{A \cos(kz)}{A k \sin(kz)} = -\frac{i\omega\rho}{Sk} \cot(kz) = -\frac{i\rho c}{S} \cot(kz)$$

Impedansen ved den åbne ende ($z = L$) bliver:

$$Z_A(L) = -\frac{i\rho c}{S} \cot(kL)$$

Ved meget lave frekvenser ($kL \ll 1$) kan cotangens repræsenteres ved de første to led af dens Taylor-serie:

$$\cot(kL) = \frac{1}{kL} - \frac{kL}{3} - \frac{(kL)^3}{45} \dots$$

Impedansen af resonatoren er, for meget lave frekvenser:

$$Z_A(L) = -\frac{i\rho c}{S} \left(\frac{1}{kL} - \frac{kL}{3} \right) = \frac{\rho c^2}{i\omega V} + i\omega \frac{\rho L}{3S}$$

Det er her udnyttet at rørets volumen V er givet ved dets længde L gange tværsnitsarealet S , samt at $\rho c k$ kan omskrives til $\omega\rho$. Modellen er anvendelig op til $kL = 1$ med cirka 3 % fejl på grund af de manglende led i rækkeudviklingen.

Impedansen af en akustisk eftergivelighed C_A og en akustisk masse M_A er givet ved:

$$Z_{AC} = \frac{1}{i\omega C_A} \quad \text{og} \quad Z_{AM} = i\omega M_A$$

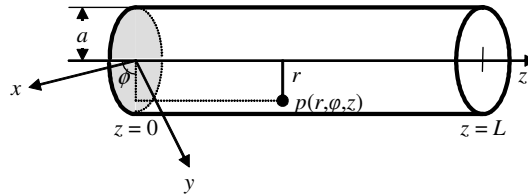
Det ses, at resonansdelen (det cylindriske rør) ved lave frekvenser kan repræsenteres ved en akustisk eftergivelighed i serie med en akustisk masse:

$$C_A = \frac{V}{\rho c^2} \quad \text{og} \quad M_A = \frac{\rho L}{3S}$$

Disse udtryk finder anvendelse i afsnittet for mundstykkets afskæringsfrekvens.

4.2 Cylindrisk model

Zinkens funktion skal her beskrives som en cylinder der er lukket i den ene ende. Modellen er generel for alle legemer, der kan beskrives som et rør der er lukket i den ene ende. Modellen kan derfor bruges på så forskellige emner, som dele af bilers udstødningssystem og musikinstrumentet en klarinet.



Figur 41 – Simple cylindrisk resonansdel med konstant radius a , der er lukket i den ende hvor mundstykket er ($z = 0$) og åben i den anden ($z = L$).

Det sæt af koordinater, der beskriver trykket p inde i cylinderen, består af radius r , vinklen φ og forskydningen z , som vist i ovenstående tegning.

En forudsætning for, at der kun vil være plane bølger i røret er, at radius er lille i forhold til bølgelængden. Desuden skal radius være større end et vist minimum for at der kan ses bort fra tab fra viskositet. Ifølge Rasmussen, side 35, kan en rettesnor angives som følger:

$$\frac{0,03 \text{ m}}{\sqrt{f}} < \text{radius} < \frac{25 \text{ m}}{f}, \quad \text{Frekvensen i hertz}$$

Zinken skal analyseres over frekvensområdet 200 Hz til 1 kHz, så kravet er at radius skal være større end 2 mm (200 Hz) og mindre end 25 mm (1 kHz). Kravene opfyldes med faktor to i denne rapport idet radius varierer fra 4,6 mm til 13,3 mm.

Det angives undertiden som en tilstrækkelig betingelse for plane bølger, at radius af røret skal være meget mindre end bølgelængden ved den aktuelle frekvens. Dette kan "oversættes" til at omkredsen skal være mindre end bølgelængden, hvilket igen medfører at radius skal opfylde følgende betingelse:

$$2\pi r < \lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow r < \frac{c}{2\pi f} = \frac{55 \text{ m/s}}{f}$$

Den ovenstående betingelses øvre grænse er derfor, at omkredsen skal være mindre end cirka det halve af bølgelængden. Radius er derved mindre end cirka 1/12 af bølgelængden.

4.2.1 Bølgeligningen

Bølgeligningen er i cylindriske koordinater:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right]$$

Det antages at resultatet er uafhængigt af en rotation om z -aksen, samt at der dannes plane bølger i røret så afhængigheden af radius kan ignoreres. De afledede med hensyn til vinklen ϕ og radius r bliver begge nul, hvilket simplificerer udtrykket til:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

Dette udtryk skal løses når cylinderen er defineret gennem specifikation af randværdierne.

4.2.2 Randværdier

Luftmolekylerne kan ikke have en retning ud gennem cylinderens væg ved starten af røret, for $z = 0$, da mundstykket i en god tilnærmelse kan opfattes som en massiv væg. Følgelig er trykket ved væggen ukendt, mens hastigheden af luftpartiklerne i retning gennem væggen, der er givet ved den første afledede af trykket, må være nul:

$$\frac{\partial p(z=0)}{\partial z} = 0$$

Luftmolekylerne kan derimod godt have retning ud gennem den åbne ende, så her kan der ikke opbygges en trykforskel; det kaldes for trykkudligning, eller på engelsk *pressure release*:

$$p(z=L) = 0$$

Det er ikke nødvendigt at beskrive randværdien for cylinderens væg (ved radius r_M), idet forudsætningen for en plan bølge gælder uanset cylinderens radius, så længe de førnævnte krav til radius er opfyldt.

4.2.3 Løsning af ligningen

Det antages at resultatet kan beskrives ved et produkt af to funktioner. Den første, $Z = Z(z)$, beskriver trykket p på langs af røret og anhænger således kun af z -retningens koordinat, og den anden funktion, $T = T(t)$, beskriver trykkets tidsmæssige forløb og den afhænger kun af koordinaten for tid.

$$p = ZT$$

Vi er kun interesseret i harmoniske svingninger, hvor en eventuel transient er døet ud, så det tidsmæssige udtryk kan beskrives ved den komplekse enhedsvektor:

$$T = \exp(i\omega t)$$

Først differentieres udtrykket for p med hensyn til tiden t og positionen z . Det udnyttes at hver af funktionerne kun afhænger af én variabel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 (ZT)}{\partial t^2} = Z \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = Z(-\omega^2) \exp(i\omega t) = \underline{\underline{-\omega^2 ZT}} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 (ZT)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} T = \underline{\underline{Z''T}} \end{aligned}$$

De fundne udtryk indsættes i bølgeligningen:

$$-\omega^2 ZT = c^2 Z''T$$

Udtrykket simplificeres ved at fjerne den tidsafhængige enhedsvektor T så kun $-\omega^2$ bliver tilbage som et resultat af differentiationen med hensyn til tiden. Udtrykket bliver derved en differentialligning af anden orden, en såkaldt *harmonisk oscillator*:

$$Z'' + k^2 Z = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}$$

Eksponentialfunktionen vides at være en løsning til differentialligningen, så vi kan forvente en løsning af den følgende type, hvor konstanten α skal bestemmes:

$$Z = \exp(\alpha z)$$

Ved at differentiere udtrykket og indsætte resultatet i differentialligningen ovenfor kan konstanten α bestemmes.

$$\begin{aligned} \alpha^2 \exp(\alpha z) + k^2 \exp(\alpha z) &= 0 \Rightarrow \\ (\alpha^2 + k^2) \exp(\alpha z) &= 0 \end{aligned}$$

Eksponentialfunktionen kan ikke antage værdien nul med variable z i intervallet fra 0 til L , så parenteser foran eksponentialfunktionen må være nul, hvilket giver følgende løsninger:

$$\alpha^2 + k^2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = -k^2 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = \pm ik}}$$

Der er to løsninger til problemet, svarende til at ligningen er af anden orden. Da begge løsninger er anvendelige, er også en linearkombination af løsningerne gyldig:

$$Z = c_1 \exp(ikz) + c_2 \exp(-ikz)$$

4.2.4 Konstanterne c_1 og c_2

Det vil være hensigtsmæssigt at benytte *Eulers* identiteter, der tillader eksponentialfunktionen at skrives ved de trigonometriske funktioner:

$$\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x) \quad \wedge \quad \exp(-ix) = \cos(x) - i \sin(x)$$

Ved indsættelse:

$$\begin{aligned} Z &= c_1 [\cos(kz) + i \sin(kz)] + c_2 [\cos(kz) - i \sin(kz)] \Rightarrow \\ Z &= (c_1 + c_2) \cos(kz) + i(c_1 - c_2) \sin(kz) \end{aligned}$$

Løsningen i z -retningen kan derved skrives:

$$Z = A \cos(kz) + iB \sin(kz), \quad A = c_1 + c_2, \quad B = c_1 - c_2$$

For at bestemme konstanterne må randbetingelserne benyttes. Vi har før fastlagt værdien af den afledede i punktet $z = 0$ som nul, hvilket bestemmer konstanten B :

$$Z'(0) = 0 \Rightarrow -Ak \sin(0) + iBk \cos(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

Løsningen er nu simplificeret til:

$$Z = A \cos(kz)$$

Konstanten A , der refererer til amplituden af svingningen, skal ikke bestemmes her, så den vil fremover blive sat til $A = 1$.

4.2.5 Bestemmelse af k

Konstanten k , vinkelbølgetallet, udtrykker signalets fasehastighed i forhold til lydens hastighed. Dimensionen er m^{-1} , så konstanten kan opfattes som en proportionalitetskonstant, der relaterer svingningen til positionen i udbredelsesretningen. Randbetingelsen for $z = L$ angiver at trykforskellen $p(L)$ skal være nul. Det er opfyldt for en uendelighed af værdier for k , og idet $k > 0$, bliver løsningerne:

$$Z(L)=0 \Rightarrow \cos(kL)=0 \Rightarrow kL = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \Rightarrow k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, \quad n=1,2,3,\dots$$

Fra definitionen af bølgetallet bestemmes et udtryk for de frekvenser hvor der kan opstå resonans i røret. Det er ved ulige multipla af den frekvens, der svarer til en kvart bølgelængde.

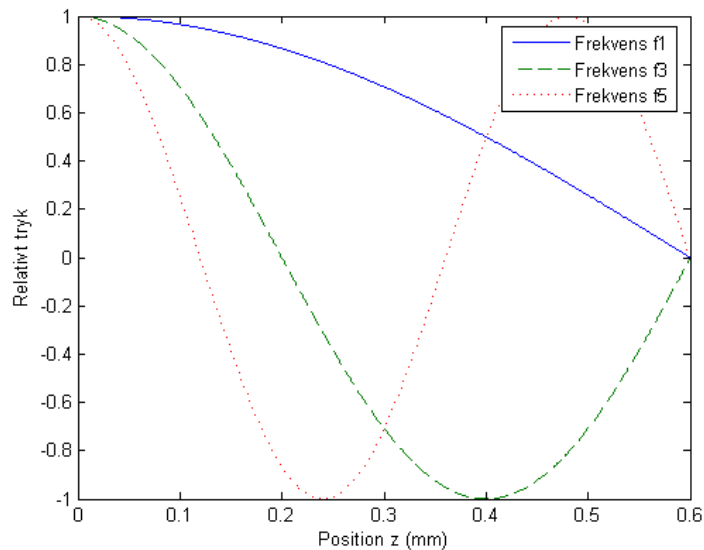
$$f_n = \frac{(2n-1)c}{4L}, \quad n=1,2,3,\dots$$

For $n = 1$ findes grundfrekvensen, første harmoniske: $f_1 = 143$ Hz, og ifølge modellen kan der kun opbygges en resonans for ulige harmoniske: $f_3 = 429$ Hz, $f_5 = 715$ Hz, etc.

4.2.6 Trykkets fordeling

Trykket i røret er for hver værdi af n givet ved:

$$p_n(z) = \cos(k_n z), \quad k_n = \frac{\pi(2n-1)}{2L}, \quad n=1,2,3,\dots$$

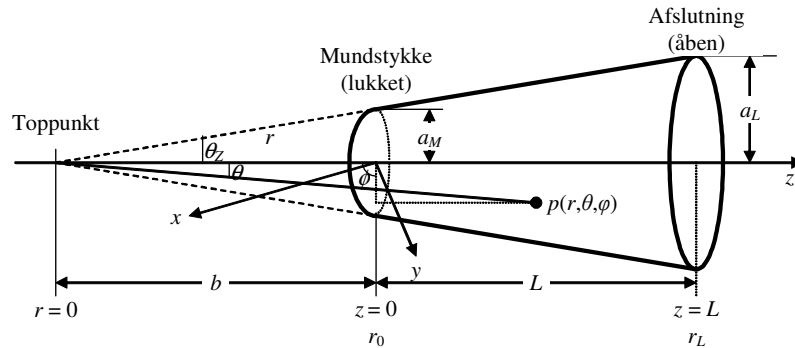


Figur 42 – Trykvariation i en cylindrisk resonator med den ene ende lukket af læberne ved mundstykket. Fuld linie angiver grundtonen, der er på en kvart bølgelængde, stiplede linie tre gange grundtonen og punkteret linie fem gange grundtonen.

Resultatet er ikke i overensstemmelse med de faktiske resonanser for zinken, hvor også de lige resonanser vides at eksistere, hvorfor den simple model må forlades til fordel for en mere kompliceret model.

4.3 Konisk model

Zinken skal i det følgende beskrives ved et udsnit af en konus, baseret på de sfæriske koordinater, r , θ og φ , hvor et punkt beskrives ved længden r fra toppunktet ($r \geq 0$), vinklen θ ud fra z -aksen ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) og vinklen φ fra x -aksen og rundt i xy planet ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$).



Figur 43 – Konisk resonansdel med radius a_M ved mundstykket og a_L ved åbningen. Røret antages lukket i ved mundstykket ($r = b$) og åben i den anden ende ($r = b + L$).

Relationen mellem positionsvariablen z og det sfæriske koordinatsystems radius r er:

$$r = b + z \quad \wedge \quad 0 \leq z \leq L$$

Konstanten b kan bestemmes ud fra zinkens åbningsvinkel θ_Z , der givet af diameteren a_M ved mundstykkets smalle ende, diameteren a_L ved afslutningens brede ende og længden L af røret. Værdierne er målt i det forrige kapitel til $a_M = 4,6$ mm, $a_L = 13,3$ mm og $L = 600$ mm, så åbningsvinklen er:

$$a_L - a_M = L \tan(\theta_Z) \quad \Rightarrow \quad \tan(\theta_Z) = \frac{a_L - a_M}{L} = 0,0145$$

Åbningsvinklen er blot $\theta_Z = 0,83^\circ$, så zinken er kun ganske lidt konisk. Afstanden fra $r = 0$ til begyndelsen af instrumentet, b , er givet ved:

$$a_M = b \tan(\theta_Z) \quad \Rightarrow \quad b = \frac{a_M}{\tan(\theta_Z)} = \frac{a_M L}{a_L - a_M} = 317 \text{ mm}$$

Radius r kan følgelig variere fra $b = 317$ mm til $b + L = 917$ mm.

4.3.1 Bølgeligningen

Bølgeligningen er i sfæriske koordinater:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \cot(\theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} \right) \right]$$

Det antages at resultatet er uafhængigt af en rotation om z -aksen (ingen afhængighed af φ), samt at trykket er det samme for fastholdt radius (ingen afhængighed af θ). De afledede med hensyn til vinklerne θ og φ bliver derved begge nul, hvilket simplificerer udtrykket:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right]$$

4.3.2 Randværdier

Luftmolekylerne kan ikke have en retning ud gennem cylinderens endevæg ved starten af røret ($z = 0$) da denne anses for massiv; den er afgrænset af læberne, som er lukket i det meste af tiden, men der kan godt opbygges et tryk ved cylinderens endevæg. Følgelig er trykket ved væggen ukendt, mens hastigheden af luftpartiklerne i retning gennem væggen, der er givet ved den første afledede af trykket, er nul.

$$\frac{\partial p(z=0)}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p(b)}{\partial r} = 0$$

De to udtryk er ikke identiske, idet udtrykket til venstre svarer til en plan, skiveformet afslutning og udtrykket til højre svarer til et udsnit af en kugle, men forskellen vil blive ignoreret i denne rapport, idet der ikke forventes betydende forskel ved lave frekvenser.

Luftmolekylerne kan godt have retning ud gennem den åbne ende, til gengæld kan der ikke opbygges en trykforskel, det kaldes for trykkudligning, eller på engelsk *pressure release*:

$$p(z=L)=0 \Rightarrow p(r=b+L)=0$$

Der vil i praksis være en vis medsvingende luftmasse, som vil forøge den effektive længde af instrumentet. Denne situation vil blive behandlet særskilt.

4.3.3 Løsning af ligningen

Igen benyttes et forsøg på at løse problemet med produktformen: Det antages at resultatet kan beskrives ved et produkt af to funktioner. Den første funktion, $R = R(r)$, beskriver trykket p langs radius, det svarer til positionen givet ved z -koordinaten, og det var forudsat at dette tryk ikke ville være en funktion af θ og φ , så trykket antages konstant over hele den kugleformede overflade. Den anden funktion, $T = T(t)$, beskriver trykkets tidsmæssige forløb.

$$p = RT$$

Vi er kun interesseret i harmoniske svingninger, hvor en eventuel transient er døet ud, så det tidsmæssige udtryk kan beskrives ved den komplekse enhedsvektor:

$$T = \exp(i\omega t)$$

Først differentieres udtrykket for p med hensyn til tiden t og positionen r . Det udnyttes at hver af funktionerne kun afhænger af én variabel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 (RT)}{\partial t^2} = R \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = R(-\omega^2) \exp(i\omega t) = \underline{\underline{-\omega^2 RT}} \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{\partial (RT)}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial r} T = \underline{\underline{R'T}} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 (RT)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} T = \underline{\underline{R''T}} \end{aligned}$$

De fundne udtryk indsættes i bølgeligningen:

$$-\omega^2 RT = c^2 \left[R''T + \frac{2}{r} R'T \right]$$

Udtrykket simplificeres ved at den tidsafhængige funktion T divideres bort på begge sider, og derefter forlænges ved multiplikation med r , til den følgende anden ordens differentialligning:

$$rR'' + 2R' + k^2 rR = 0 \quad \wedge \quad k = \frac{\omega}{c}$$

Dette er en variant af den parametriske form af Bessels ligning. Den generelle ligning er vist nedenfor sammen med dens løsning (Westergren, side 277).

$$r^2 R'' + 2rR' + [k^2 r^2 - n(n+1)]R = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$R = c_1 j_n(kr) + c_2 y_n(kr)$$

Parameteren (n) er nul. Løsningen består derfor af de to sfæriske Besselfunktioner funktioner j_0 og y_0 , der er defineret i fx Westergren, side 277. Benyttes disse definitioner findes løsningen for trykvariationerne i zinkens rør til:

$$R(r) = c_1 \frac{\sin(kr)}{kr} - c_2 \frac{\cos(kr)}{kr}, \quad k = \frac{\omega}{c}$$

4.3.4 Konstanterne c_1 og c_2

Randværdien indsættes for den brede ende af instrumentet, $r_L = b + L$, hvor trykket skal være nul. Trykket er givet ved $p = R(r)T(t)$ og da tidsafhængigheden $T(t)$ ikke kan antage værdien nul, medfører det at $R(r_L) = 0$. Ved indsættelse i udtrykket for R giver det følgende binding mellem koefficienterne:

$$c_1 \frac{\sin(kr_L)}{kr_L} - c_2 \frac{\cos(kr_L)}{kr_L} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 \sin(kr_L) = c_2 \cos(kr_L), \quad r_L = b + L$$

Der er behov for den afledede af p for fastlæggelse af betingelserne ved instrumentets start:

$$\begin{aligned} R'(r) &= c_1 \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\sin(kr)}{kr} \right\} - c_2 \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\cos(kr)}{kr} \right\} \\ &= c_1 \left[\frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} \{ \sin(kr) \} + \sin(kr) \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{kr} \right\} \right] - c_2 \left[\frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} \{ \cos(kr) \} + \cos(kr) \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{kr} \right\} \right] \\ &= c_1 \left[\frac{1}{kr} k \cos(kr) - \sin(kr) \frac{1}{kr^2} \right] - c_2 \left[-\frac{1}{kr} k \sin(kr) - \cos(kr) \frac{1}{kr^2} \right] \\ &= \left[\frac{c_1}{r} + \frac{c_2}{kr^2} \right] \cos(kr) + \left[\frac{c_2}{r} - \frac{c_1}{kr^2} \right] \sin(kr) \end{aligned}$$

Randværdien indsættes for den smalle ende af instrumentet, $r_0 = b$, hvor hastigheden af luftens partikler, det vil sige den afledede af trykket, skal være nul. Igen må $R'(b)$ være nul idet den tidsafhængige funktion $T(t)$ ikke kan være nul.

$$\left[\frac{c_1}{b} + \frac{c_2}{kb^2} \right] \cos(kb) + \left[\frac{c_2}{b} - \frac{c_1}{kb^2} \right] \sin(kb) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan(kb) = -\frac{\frac{c_1}{b} + \frac{c_2}{kb^2}}{\frac{c_2}{b} - \frac{c_1}{kb^2}} = \frac{c_1 kb + c_2}{c_1 - c_2 kb}$$

Udtrykket for c_1 elimineres ved indsættelse:

$$\tan(kb) = \frac{\frac{c_2 \cos(kr_L)}{\sin(kr_L)} kb + c_2}{\frac{c_2 \cos(kr_L)}{\sin(kr_L)} - c_2 kb} = \frac{kb \cos(kr_L) + \sin(kr_L)}{\cos(kr_L) - kb \sin(kr_L)}, \quad r_L = b + L$$

Afhængigheden af c_2 udgår, så der kræves kun et vist forhold mellem koefficienterne for at tilfredsstille randværdierne, mens den absolutte værdi er uinteressant. Forholdet afhænger af frekvensen og de geometriske mål, mens radius ikke indgår. Det vælges her at benytte en sinusrelation for c_2 , hvilket tilsvarende giver en cosinusrelation for c_1 :

$$c_2 = \sin(kr_L) \Rightarrow c_1 = \sin(kr_L) \frac{\cos(kr_L)}{\sin(kr_L)} = \cos(kr_L)$$

Løsningen til R -problemet bliver derved:

$$R(r) = \cos(kr_L) \frac{\sin(kr)}{kr} - \sin(kr_L) \cdot \frac{\cos(kr)}{kr}$$

$$b \leq r \leq r_L, \quad r_L = b + L, \quad k = \frac{\omega}{c}$$

4.3.5 Bestemmelse af k

Ligningen for $\tan(kb)$ introducerer et krav til kb og er dermed bestemmende for de mulige resonansfrekvenser i zinkens koniske rør, så ligningen er selve kernen i denne analyse, men problemet er ikke helt nemt at løse. En Taylor rækkeudvikling kan ikke komme på tale, idet den forudsætter at kr_L er meget lille, hvilket igen forudsætter, at analysen blev begrænset til frekvenser under $c/2\pi r_L = 60$ Hz, der er lavere end den laveste forventede resonansfrekvens på 220 Hz og derfor er uinteressant. En numerisk løsning er påkrævet.

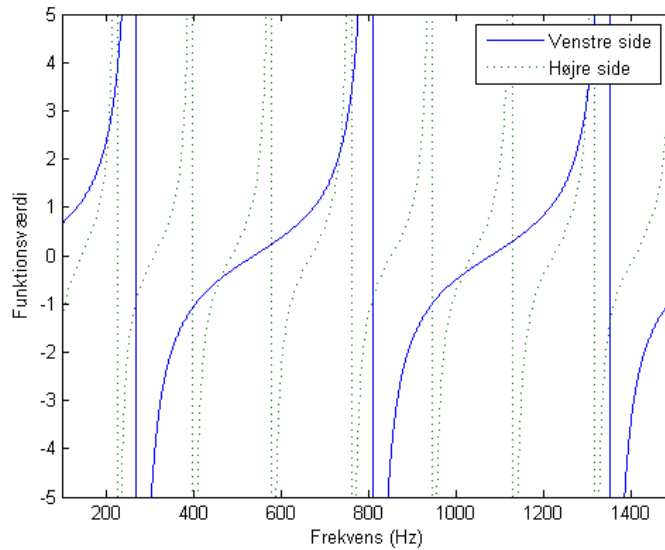
For at finde de frekvenser hvor ligningen er valid, og dermed de mulige værdier af de naturlige resonansfrekvenser f_n , blev venstre side og højre side af ligningen skrevet ind i et MATLAB program. Ligningens form var:

$$\tan(k_n b) = \frac{k_n b \cos(k_n b m) + \sin(k_n b m)}{\cos(k_n b m) - k_n b \sin(k_n b m)}, \quad k_n = \frac{\omega_n}{c} = \frac{2\pi f_n}{c}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 1 + \frac{L}{b}$$

Resultatet er vist i Figur 44 for den situation hvor alle zinkens huller er lukket, hvilket skal give grundfrekvensen A på 220 Hz.

Første lighed mellem venstre og højre side af ligningen aflæses til $f_1 = 206,2$ Hz, hvilket svarer til 112 cent (6,3 %) under det forventede på 220 Hz. Zinken klinger i praksis meget tæt på 220 Hz, så noget tyder på, at man ved spil intonerer instrumentet cirka en halv tone op. Denne opdagelse kan forklare, hvorfor det er ganske let at sænke instrumentets tone med et eller to halvtone trin, mens det er langt sværere at hæve en tone tilsvarende.

I det efterfølgende tages til efterretning at tonen A ovenfor er beregnet til 206,2 Hz. Det andet krydspunkt findes ved $f_2 = 461,3$ Hz, hvilket er 1394 cent over grundtonen, eller 194 cent (11,9 %) over oktaven, så instrumentet springer ikke frivilligt op i til den dobbelte frekvens af grundtonen på 1200 cent. Beregningen angiver at tone skulle være næsten oppe på H, to halvtone trin over A, men i praksis er tonen nærmere Bb, kun et enkelt halvtone trin over A.



Figur 44 – Ligningen for bestemmelse af mulige resonansfrekvenser er her repræsenteret ved venstre side og højre side af ligningen, med frekvensen som variabel. De lodrette streger repræsenterer skift fra uendelig til minus uendelig og er ikke en brugbar del af løsningen.

Resultatet af analysen er sammenfattet nedenfor for de første seks resonansfrekvenser hvor de sammenlignes med resultaterne fra måleafsnittet.

Tabel 13 – Tabel over naturlige resonansfrekvenser for zinken med 0,83° åbningsvinkel og en længde på 600 mm. Data sammenlignes i sidste kolonne med måledata på zinken.

Nummer	Beregnet	Relativt	Målt	Afvigelse
1	206,2 Hz	1,000	217,1	-5,0 %
2	461,3 Hz	2,237	440,9	4,6 %
3	735,5 Hz	3,567	675,9	8,8 %
4	1015,7 Hz	4,926	936,2	8,5 %
5	1298,2 Hz	6,296	1165	11,4 %
6	1582,0 Hz	7,672	1408	12,4 %

Afvigelsen fra det beregnede er større end forventet. Det kunne betyde, at den koniske model har en forkert åbningsvinkel, eller at modellen ikke er præcis nok. Dette spørgsmål tages op i et senere afsnit, når effekten af forskellige åbningsvinkler bliver studeret.

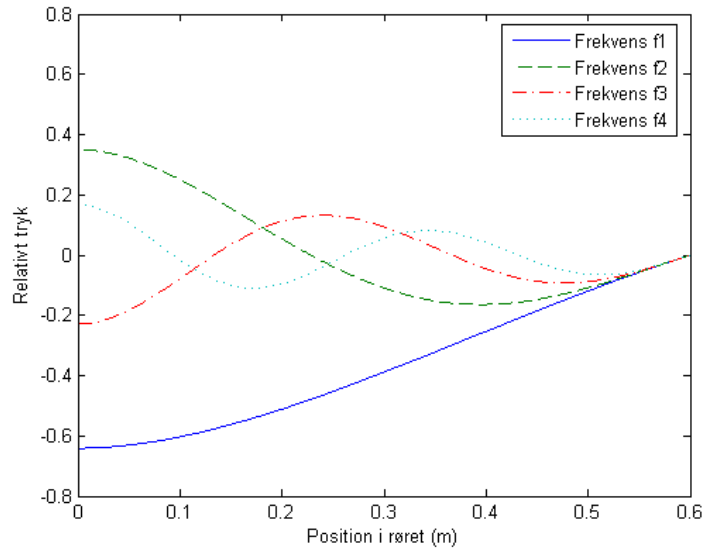
4.3.6 Trykket i røret

Udtrykket for trykket i zinkens rør var $p = R(r)T(t)$, men da den tidsafhængige funktion er en kompleks enhedsvektor, er amplituden af trykket kun afhængig af radius. Trykket i zinkens koniske rør er derved givet af:

$$R_n(r) = \cos(k_n r_L) \frac{\sin(k_n r)}{k_n r} - \sin(k_n r_L) \frac{\cos(k_n r)}{k_n r}$$

$$b \leq r \leq r_L, \quad r_L = b + L, \quad k_n = \frac{\omega_n}{c} = \frac{2\pi f_n}{c}$$

Resultatet er vist i Figur 45 med en kurve for hver af de fire første resonansfrekvenser. At de to af kurverne starter med en negativ værdi af trykkets amplitude skal ikke tillægges større betydning; det skyldes at radius beregningsmæssigt starter fra $r = 0$, hvorimod problemet kun er defineret fra $r = b = 317$ mm hvor $z = 0$. At amplituden af trykvariationen også afviger i værdi ved $z = 0$, både for de forskellige resonansfrekvenser og ved sammenligning med den cylindriske resonator, skal heller ikke tillægges større betydning; det skyldes alene valget af koefficienterne, c_1 og c_2 , der ikke er fastlagt ud fra et krævet lydtryk, men alene er blevet valgt ud fra kravet til forholdet mellem koefficienterne.



Figur 45 – Trykvariation i det koniske rør som funktion af positionen med frekvensen som parameter. Trykket er størst ved starten af røret, hvor mundstykket lukker af, og går mod nul ved den brede ende af røret, hvor der er trykkudligning.

Forskellen mellem trykvariationerne i en konisk resonator og en cylindrisk resonator ses tydeligt. For det første har trykket en aftagende indhylningskurve ud gennem røret, hvor den cylindriske resonator har konstant indhylningskurve gennem hele røret. For det andet er den koniske instruments naturlige resonansfrekvenser ikke harmoniske med grundtonen, og for det tredje er anden resonansfrekvens næsten lig med det dobbelte af grundtonen, hvorimod den cylindriske resonator slet ikke kan gå i resonans på lige harmoniske.

4.3.7 Andre åbningsvinkler

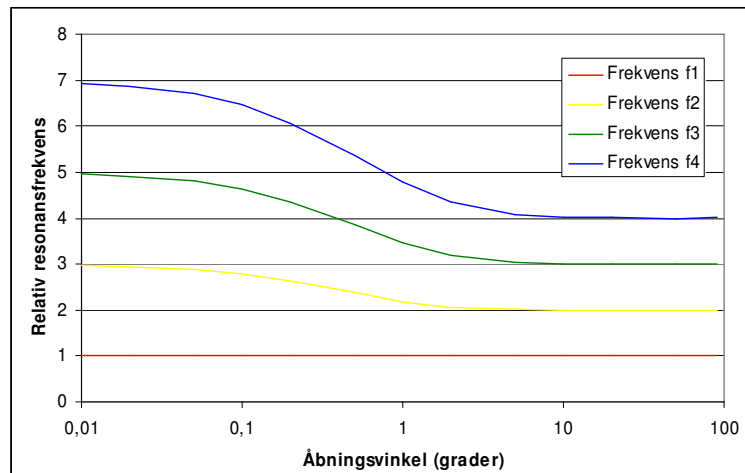
Det er interessant at studere grænselandet mellem den cylindriske resonator og den koniske resonator for at se hvordan resonansfrekvenserne varierer som funktion af åbningsvinklen θ_z , der er givet af radierne a_M og a_L ved henholdsvis starten og slutningen på det koniske rør som vist tidligere. I denne analyse vil længden af røret L og diameteren ved mundstykket a_M blive fastholdt, mens åbningsvinklen varieres indenfor sit definitionsområde (0° til 90°) og relationen mellem de naturlige resonansfrekvenser i røret fremgår af tabellen nedenfor.

Frekvensen af grundtonen varierer fra 144 Hz ved den koniske resonator til 286 Hz ved den fuldt åbne og koniske resonator med $\theta_z = 90^\circ$. Den sidste værdi angiver en resonans for en plan, cirkelformet skive med L som radius, hvilket er at drive modellen for langt; resultaterne i tabellen skal derfor tages med et gran salt.

Tabel 14 – De naturlige resonansfrekvenser for et konisk rør med varierende åbningsvinkel, men med fastholdt radius ved mundstykket ($a_M = 4,6$ mm) og længde af røret ($L = 600$ mm).

Vinkel θ_z	Toppunkt b	Frekvens f_1	Frekvens f_2	Frekvens f_3	Frekvens f_4
0,01°	26,356 m	144,2 Hz	429,2 Hz	714,9 Hz	1000,6 Hz
0,02°	13,178 m	145,5 Hz	429,6 Hz	715,1 Hz	1000,8 Hz
0,05°	5,271 m	149,2 Hz	431,0 Hz	715,9 Hz	1001,4 Hz
0,1°	2,636 m	155,0 Hz	433,1 Hz	717,2 Hz	1002,3 Hz
0,2°	1,318 m	165,3 Hz	437,4 Hz	719,8 Hz	1004,2 Hz
0,5°	527 mm	188,6 Hz	449,4 Hz	727,5 Hz	1009,7 Hz
1°	264 mm	213,0 Hz	466,7 Hz	739,4 Hz	1018,6 Hz
2°	132 mm	238,3 Hz	492,3 Hz	760,0 Hz	1035,0 Hz
5°	52,6 mm	263,2 Hz	528,8 Hz	797,8 Hz	1070,5 Hz
10°	26,1 mm	274,0 Hz	548,3 Hz	823,4 Hz	1099,3 Hz
20°	12,6 mm	280,0 Hz	560,0 Hz	840,1 Hz	1120,3 Hz
50°	3,86 mm	284,0 Hz	568,0 Hz	852,0 Hz	1136,0 Hz
89,99°	803 nm	285,8 Hz	571,7 Hz	857,5 Hz	1143,3 Hz

Resonansfrekvenserne er nedenfor vist grafisk som funktion af åbningsvinklen og normeret efter grundtonen (f_1 i tabellen ovenfor). Som det fremgår, vil frekvenserne tilnærme den harmoniske række 1, 2, 3, ... for åbningsvinkler over 10° og den ulige række 1, 3, 5, ... for åbningsvinkler under 00,1°, hvor røret kan siges at ligne den cylindriske facon.



Figur 46 – De naturlige resonansfrekvenser i et konisk rør som funktion af åbningsvinklen. Resonansfrekvenserne svarer til de naturlige resonoansfrekvenser ved et cylindrisk rør for små åbningsvinkler.

Zinken befinder sig med en åbningsvinkel på 0,83° omtrent midtvejs mellem de to serier, så de naturlige resonansfrekvenser i instrumentet vil ikke blive harmoniske til grundtonen, som det da også er erfaret tidligere.

4.3.8 Justering af modellen

Det tidligere adresserede problem, med at resonansfrekvenserne ikke passede helt med målingerne skal nu analyseres i det lys, at værdien af rørets åbningsvinkel kan være usikker.

Åbningsvinklen var beregnet ud fra måleværdier for resonansdelens start og slutning under den forudsætning at udviklingen var lineær fra mundstykkets 9,6 mm til åbningens 26,6 mm, svarende til en åbningsvinkel på $0,83^\circ$.

Som vist i Figur 10 er diameterens variation snarere en ret linie fra de føromtalte 9,2 mm til en tilsyneladende diameter på 26,0 mm, svarende til en åbningsvinkel på $0,80^\circ$. Det medfører som tabellen nedenfor viser, at resonansfrekvensen falder lidt og at afstanden til de højere resonanser øges til 2,246 gange. Måledata antyder at tallet skal være 2,0509 gange, så afstanden er 9,5 % for stor i forhold til måledata.

Tabel 15 – Tabel over naturlige resonansfrekvenser for zinken med $0,80^\circ$ åbningsvinkel og en længde på 600 mm. Data sammenlignes i sidste kolonne med måledata på zinken.

Nummer	Beregnet	Relativt	Målt	Afvigelse
1	204,9 Hz	1,000	217,1	-5,6 %
2	460,2 Hz	2,246	440,9	4,4 %
3	734,8 Hz	3,586	675,9	8,7 %
4	1015,2 Hz	4,955	936,2	8,4 %

En beregning med en åbningsvinkel på 1° er vist i Tabel 14. Resonansfrekvensen er hævet til 213,0 Hz, hvilket er tættere på måledata men afstanden til anden resonansfrekvens er forøget til 2,191 gange, det er 6,8 % mere end måledata, så forholdet er bedret lidt. For 2° bliver resonansfrekvensen på 238,3 Hz, hvilket nu er højere det målte, til gengæld bliver den relative placering af anden resonansfrekvens 2,066, hvilket blot er 0,7 % over det målte. Til gengæld er modellens diameter ved zinkens åbne ende ændret fra 26,6 mm til 30,2 mm, hvilket er lidt svært at forsvare.

Ingen af varianterne er acceptable, modellen er simpelthen ikke præcis nok.

4.4 Konisk model med endekorrektion

Modellen af zinken har indtil nu forudsat, at trykvariationen ved den brede ende af zinken var nul, hvilket ikke tager den medsvingende masse af luft i betragtning. En mere realistisk model angiver et tryk i den åbne ende givet ved den impedans, som belaster åbningen, og den beregnede partikkelhastighed i zinkens åbning. Randværdien for $z = L$, hvilket er ækvivalent med $r_L = b + L$, skal derfor ændres fra den tidligere antagelse, $p(r_L) = 0$, til:

$$p(r_L) = Z_{AR} S u_z(r_L)$$

Faktor S er tværsnitsarealet af zinkens åbning.

Forholdene er uændrede for den smalle ende af zinken, hvor mundstykket lukker af for røret. Randværdien for $z = 0$, hvilket er ækvivalent med $r_0 = b$, er derfor bibeholdt:

$$\frac{\partial p(0)}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p(r_0)}{\partial r} = 0$$

4.4.1 Strålingsimpedans

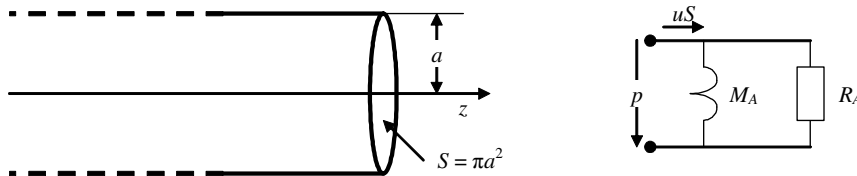
Strålingsimpedansen vil her benytte modellen for et stempel i enden af et uendelig langt rør. Fra Leach, side 45-46, haves en definition af strålingsimpedansen:

$$Z_{AR} = i\omega M_A + R_A$$

$$M_A = 0,6133 \frac{\rho}{\pi a_L} = 17,6 \text{ kgm}^{-4}$$

$$R_A = 1,5045 \frac{\rho c}{\pi a_L^2} = 1,11 \cdot 10^6 \text{ Nsm}^{-5}$$

Konstanten $a_L = 13,3$ mm er radius af rørets åbning. Modellen er frekvensmæssigt begrænset af kravet $ka_L < 1$, til cirka 4 kHz.



Figur 47 – Modellen af zinkens åbne ende er et plant stempel med radius a placeret i enden af et uendelig langt rør. Ækvivalentdiagrammet angiver en masse M_A , der repræsenterer den medsvingende masse af luft, i parallel med en R_A , der repræsenterer den modstand, som den akustiske effekt afsættes i. Trykket er p og volumehastigheden er uS .

4.4.2 Bølgeligningen

Det har ingen betydning for bølgeligningen om den er med eller uden endekorrektion, så løsningen er identisk med den tidligere fundne løsning for trykket i z -retningen:

$$R(r) = c_1 \frac{\sin(kr)}{kr} - c_2 \frac{\cos(kr)}{kr}, \quad b \leq r \leq b + L$$

Også den afledede af trykket er tidligere fundet:

$$R'(r) = \left[\frac{c_1}{r} + \frac{c_2}{kr^2} \right] \cos(kr) + \left[\frac{c_2}{r} - \frac{c_1}{kr^2} \right] \sin(kr), \quad b \leq r \leq b + L$$

Den afledede skal være nul i henhold til randværdibetingelsen ved $r = b$, det vil sige at trykket skal have vandret tangent i starten af røret, hvor mundstykket blokerer:

$$\begin{aligned} R'(b) = 0 &\Rightarrow \\ \left[\frac{c_1}{b} + \frac{c_2}{kb^2} \right] \cos(kb) + \left[\frac{c_2}{b} - \frac{c_1}{kb^2} \right] \sin(kb) &= 0 \Rightarrow \\ \left[\frac{c_2}{b} - \frac{c_1}{kb^2} \right] \sin(kb) &= - \left[\frac{c_1}{b} + \frac{c_2}{kb^2} \right] \cos(kb) \Rightarrow \\ \tan(kb) &= - \frac{\frac{c_1}{b} + \frac{c_2}{kb^2}}{\frac{c_2}{b} - \frac{c_1}{kb^2}} = - \frac{c_1 kb + c_2}{c_2 kb - c_1} \Rightarrow \\ (c_2 kb - c_1) \tan(kb) &= -(c_1 kb + c_2) \Rightarrow \\ c_2 kb \tan(kb) - c_1 \tan(kb) &= -c_1 kb - c_2 \Rightarrow \\ [kb \tan(kb) + 1] c_2 &= [-kb + \tan(kb)] c_1 \Rightarrow \\ c_2 &= \frac{\tan(kb) - kb}{kb \tan(kb) + 1} c_1 \\ c_2 &= \frac{\sin(kb) - kb \cos(kb)}{kb \sin(kb) + \cos(kb)} c_1 \end{aligned}$$

Udtrykket for lydtrykket i zinkens rør kan derved skrives:

$$R(r) = \left[\frac{\sin(kr)}{kr} - \frac{\sin(kb) - kb \cos(kb)}{kb \sin(kb) + \cos(kb)} \cdot \frac{\cos(kr)}{kr} \right] c_1$$

Konstanten c_1 er uden betydning for løsningen og skal ikke fastlægges her.

Lydtrykket er givet ved randværdibetingelsen for $z = L$, det vil sige den åbne ende af zinken hvor $r_L = b + L$, hvilket giver følgende relation:

$$R(r_L) = Z_{AR} S u_z(r_L)$$

Partikkelhastigheden ved den åbne ende af instrumentet kan, som det blev vist i afsnit 4.1.3, skrives som:

$$u_z = \frac{i}{k\rho c} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{i}{k\rho c} R'(r_L)$$

Den afledede af R er derfor nødvendig for bestemmelse af partikkelhastigheden i punktet r_L .

Først beregnes det generelle udtryk:

$$\begin{aligned} R'(r) &= \left[\frac{c_1}{r} + \frac{c_2}{kr^2} \right] \cos(kr) + \left[\frac{c_2}{r} - \frac{c_1}{kr^2} \right] \sin(kr) \Rightarrow \\ R'(r) &= \frac{1}{kr^2} \{ [krc_1 + c_2] \cos(kr) + [krc_2 - c_1] \sin(kr) \} \Rightarrow \\ R'(r) &= \frac{1}{kr^2} \{ [kr \cos(kr) - \sin(kr)] c_1 + [\cos(kr) + kr \sin(kr)] c_2 \} \end{aligned}$$

Udtrykket for c_2 indsættes:

$$R'(r) = \frac{1}{kr^2} \left\{ kr \cos(kr) - \sin(kr) + [\cos(kr) + kr \sin(kr)] \frac{\sin(kb) - kb \cos(kb)}{kb \sin(kb) + \cos(kb)} \right\} c_1$$

Det generelle udtryk for partikelhastigheden i z -aksens retning bliver:

$$u_z(r) = \frac{i}{\rho c k^2 r^2} \left\{ kr \cos(kr) - \sin(kr) + [\cos(kr) + kr \sin(kr)] \frac{\sin(kb) - kb \cos(kb)}{kb \sin(kb) + \cos(kb)} \right\} c_1$$

Følgelig har vi følgende udtryk for åbningen af røret:

$$\begin{aligned} R(r_L) &= Z_{AR} S u_z(r_L), \quad \text{hvor} \\ R(r_L) &= \left[\frac{\sin(kr_L)}{kr_L} - \frac{\sin(kb) - kb \cos(kb)}{kb \sin(kb) + \cos(kb)} \cdot \frac{\cos(kr)}{kr_L} \right] c_1 \\ Z_{AR} S u_z(r_L) &= \frac{i Z_{AR} S}{\rho c k^2 r_L^2} \left\{ kr_L \cos(kr_L) - \sin(kr_L) + [\cos(kr_L) + kr_L \sin(kr_L)] \frac{\sin(kb) - kb \cos(kb)}{kb \sin(kb) + \cos(kb)} \right\} c_1 \end{aligned}$$

Konstanten c_1 udgår og vi står tilbage med en venstre side af ligningen (VS) og en højre side af ligningen (HS), som skal være identiske:

$$\begin{aligned} VS &= \frac{\sin(kr_L)}{kr_L} - \frac{\sin(kb) - kb \cos(kb)}{kb \sin(kb) + \cos(kb)} \cdot \frac{\cos(kr)}{kr_L} \\ HS &= \frac{i Z_{AR} S}{\rho c k^2 r_L^2} \left\{ kr_L \cos(kr_L) - \sin(kr_L) + [\cos(kr_L) + kr_L \sin(kr_L)] \frac{\sin(kb) - kb \cos(kb)}{kb \sin(kb) + \cos(kb)} \right\} \end{aligned}$$

Venstre side af ligningen er reel, og højre side af ligningen indeholder den imaginære enhed multipliceret med en impedans og et reelt udtryk. For at det kan give mening, må impedansen være rent imaginær, så det er derfor tvingende nødvendigt, at se bort fra det tabsgivende led R_A . Strålingsimpedansen simplificeres derved til udelukkende at bestå af den medsvingende lufts masse:

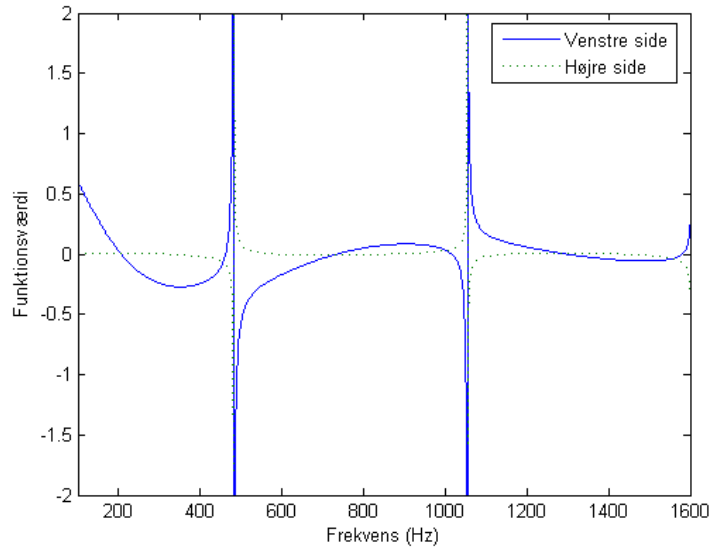
$$Z_{AR} = i \omega M_A$$

Højre sides ω/c vil tage det ene k i nævneren og identiteten $VS = HS$ bliver:

$$\begin{aligned} VS &= \frac{\sin(kr_L)}{kr_L} - \frac{\sin(kb) - kb \cos(kb)}{kb \sin(kb) + \cos(kb)} \cdot \frac{\cos(kr)}{kr_L} \\ HS &= - \frac{M_A S}{\rho c k r_L^2} \left\{ kr_L \cos(kr_L) - \sin(kr_L) + [\cos(kr_L) + kr_L \sin(kr_L)] \frac{\sin(kb) - kb \cos(kb)}{kb \sin(kb) + \cos(kb)} \right\} \end{aligned}$$

4.4.3 Bestemmelse af k

Ligningerne VS og HS blev skrevet ind i en fil og MATLAB sat til at tegne graferne for de to funktioner. Løsningen til problemet er der, hvor de to kurver skærer hinanden.



Figur 48 – Ligningen for bestemmelse af mulige resonansfrekvenser er her repræsenteret ved venstre side og højre side af ligningen, med frekvensen som variabel. De lodrette streger repræsenterer skift fra uendelig til minus uendelig og er ikke en brugbar del af løsningen.

Resultatet af analysen er sammenfattet i tabellen herunder, hvor de beregnede frekvenser er sammenlignet med de målte. Der er en lille forbedring i forhold til modellen uden korrektion for den medsvingende luft.

Tabel 16 – Resonansfrekvens (hertz) for tonen A-220. Sammenligning mellem den teoretiske beregning og de målte værdier.

Tone	Beregnet	Måling	Afvigelse
Frekvens 1	203,9	217,1	-6 %
Frekvens 2	455,4	440,9	3,3 %
Frekvens 3	725,8	675,9	7,4 %
Frekvens 4	1002	936,2	7,0 %
Frekvens 5	1281	1165	10,0 %
Frekvens 6	1561	1408	10,9 %

Første resonansfrekvens er sænket lidt, fra 206,2 Hz til 203,9 Hz og afstanden til anden resonans er 2,233, hvilket er 8,9 % over det målte. Det er ikke et godt resultat.

4.5 Klangfarve

Zinkens resonator vil ikke blot oscillere sinusformet på en af de naturlige resonansfrekvenser, når der spilles på instrumentet. Derimod vil der blive drevet en pulserende luftstrøm ind i instrumentet fra læberne, som vil indeholde både harmoniske til grundtonen og i de fleste tilfælde også støj. For at få en ide om den klanglige sammensætning af overtonerne studeres en situation hvor instrumentet drives fra en pulsende generator.

Det resulterende spektrum består af tre dele, H_r som beskriver resonansdelen, H_m som beskriver mundstykkets filtrering og H_l som repræsenterer læbernes pulserende luftstrøm:

$$H = H_r H_m H_l$$

De tre dele skal introduceres nedenfor.

Resonansdelen H_r beskrives ved amplituden a_n af resonansfrekvensen f_n af den enkelte resonans samt af godheden Q_n , som er givet af måledata ud fra -3 dB punktet, her repræsenteret ved den øvre og nedre frekvens af -3 dB punktet, henholdsvis f_2 og f_1 .

$$H_r = \sum_{n=1}^8 \frac{\frac{a_n}{Q_n}}{1 - \left(\frac{f}{f_n}\right)^2 + i \frac{1}{Q_n} \frac{f}{f_n}}, \quad Q_n = \frac{f_n}{f_2 - f_1}$$

Værdierne for resonansdelen er ved tidligere måling fundet som anført i Tabel 17 for de første seks resonansfrekvenser, det er gennemsnitsværdierne fra afsnit 3.4. Værdierne for kolonnen *Godhed* stammer fra måleserie 4.

Tabel 17 – Resonansernes amplitude, frekvens og godhed for tonen A-220.

Resonans	Amplitude	Frekvens	Godhed
1	2,4 dB	217,1	24
2	4,7 dB	440,9	36
3	0,2 dB	675,9	37
4	-1,8 dB	936,2	37
5	-6,0 dB	1165	39
6	-7,4 dB	1408	35

Amplitudeværdierne beregnes som $a_n = 10^{a/20}$ hvor a er tabelværdien i decibel. Indsættes data i ovenstående formel bliver resultatet som vist i Figur 49, der er en model af zinkens måledata, som gengivet i Figur 22.

Mundstykket kan, som tidligere er vist, modelleres som et anden ordens filter med en fast afskæringsfrekvens f_m , der er fastlagt til cirka 2,2 kHz. Filteret vil tillade lave frekvenser at passere uden ændring i amplituden, mens højere frekvenser skæres af med -12 dB/oktav over afskæringsfrekvensen.

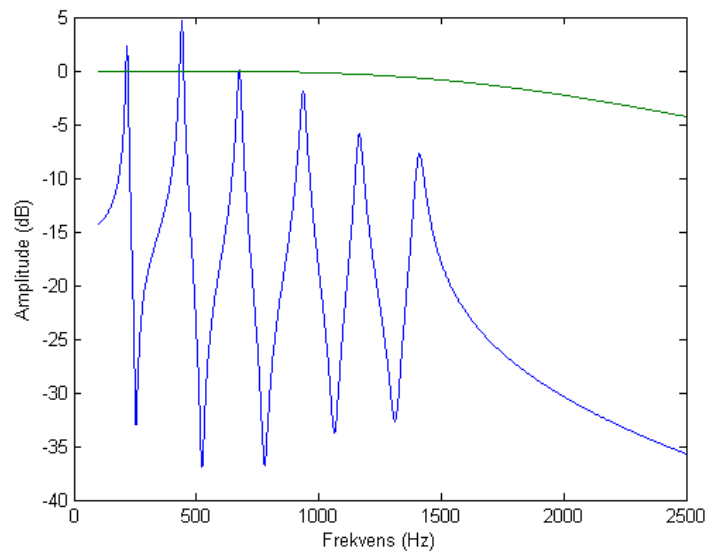
Mundstykket vil her blive modelleret som et anden ordens Butterworth filter ($n = 2$), hvor der udelukkende refereres til amplituden, idet fasen ikke er af betydning for analysen.

$$H_m = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_m}\right)^{2n}}}$$

Filteret er vist i Figur 49 sammen med de seks første af zinkens naturlige resonanser.

Læberne opfattes som en pulsgenerator med en pulsbredde på en brøkdelt af grundfrekvensen. Det antages simpelthen at pulsen er så smal at den har alle harmoniske repræsenteret med samme amplitude.

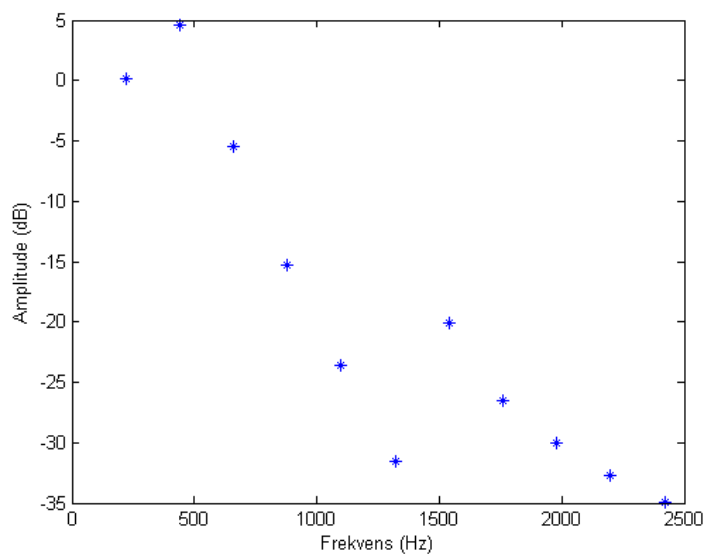
Resultatet er vist nedenfor hvor resonansspektret gerne skulle minde om det målte spektrum for måleserie 2 i Figur 22.



Figur 49 – Beregnet frekvensspektrum for zinkens tone A-220, med en kurve for zinkens seks laveste resonanser samt for mundstykkets afskæring.

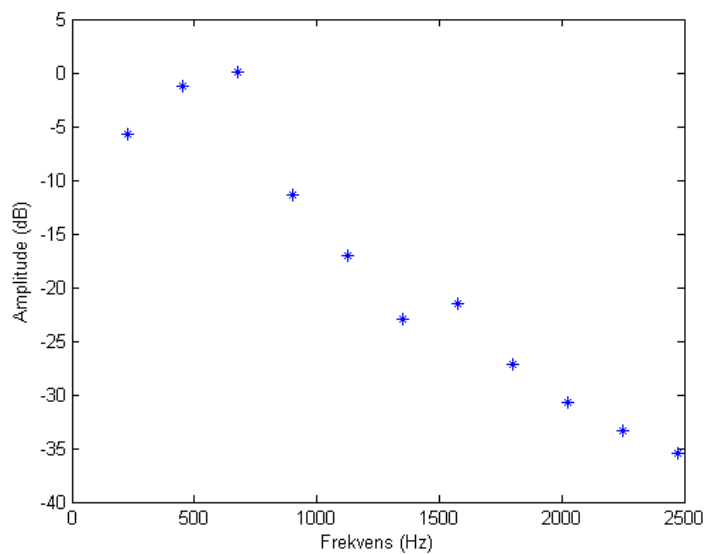
Amplituden af de harmoniske vises nedenfor når instrumentet drives til 220 Hz svarende til at tonen forceres op med 23 cent (1,3 %). Der ses nogenlunde sammenfald mellem de tre første harmoniske og tre første resonansfrekvenser, idet de parvist passer nogenlunde sammen. Fjerde, femte og sjette harmoniske rammer derimod successivt for lavt og bliver dæmpet noget i forhold til de lavere harmoniske. Syvende harmoniske bliver derimod forstærket, nok fordi den ligger tæt på sjette resonansfrekvens.

Modellen tillader ikke konklusioner over cirka 1,5 kHz da der ikke er benyttet højere liggende resonansfrekvenser end 1,4 kHz i analysen.



Figur 50 – Amplituden af de harmoniske overtoner for zinkens dybe tone på 220 Hz.

Amplituden af de harmoniske vises nedenfor når instrumentet drives til 225 Hz svarende til at tonen forceres op med 62 cent (3,6 %). Det ses at resultatet er en ændring af den harmoniske overtonestruktur idet anden harmoniske sænkes, mens niveauet øges for tredje, fjerde, femte og sjette harmoniske.



Figur 51 – Amplituden af de harmoniske overtoner for zinkens dybe tone på 225 Hz.

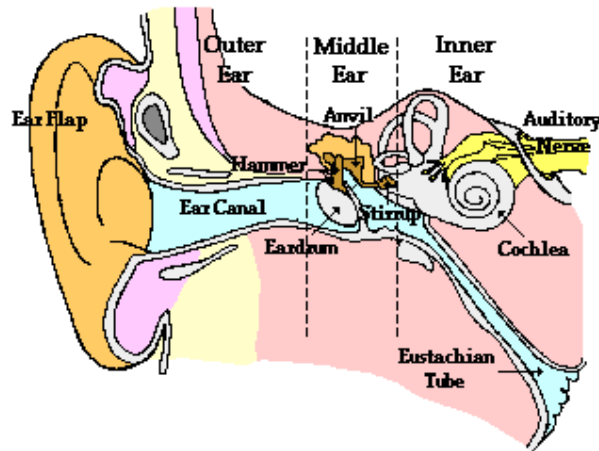
Det gennemgående træk er dog, at der er relativt få harmoniske overtoner i zinken, hvilket passer udmærket med dens bløde klang. For et moderne øre kan klangen sammenlignes med en sopran saxofon, der spilles ”pænt”.

5 Appendiks

En samling af baggrundsstof.

5.1 Frekvensopløsning

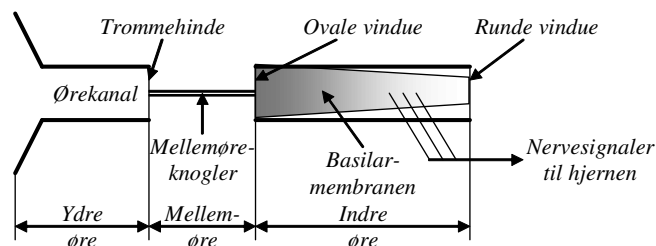
Øret er en frekvensanalysator, hvor det indre øre spiller en vigtig rolle. Signalet modtages af det ydre øre og det transmitteres gennem mellemørets knogler til det indre øre. Det ydre øre er af betydning for vor retningsopfattelse. Ørets kanal og mellemøret omsætter impedansen fra det ydre luftmedium til det indre væskemedium og samtidig frekvensvægtes signalerne, så de dybe toner dæmpes og toner omkring 4 kHz forstærkes.



Figur 52 – Model af øret med det ydre øre, mellemøre og indre øre. Lyden omsættes til elektriske pulser i Cochlea og føres til hjernen.

Fra <http://www.glenbrook.k12.il.us/GBSSCI/PHYS/Class/sound/u1112d.html>.

Det ovale vindue driver væsken i det indre øre og det runde vindue, der leder tilbage til mellemøret, udligner trykforskelle i det indre øre, idet væsken ikke kan komprimeres.



Figur 53 – Simple model af øret i en meget skematisk fremstilling. Signalet opfanges af det ydre øre og omsættes gennem to membraner (trommehinden og det ovale vindue) og tre mellemøreknoglerne til svingninger i væsken i det indre øre. Basilmembranen er en frekvensanalysator, der leder høje og lave frekvenser til forskellige nervetråde.

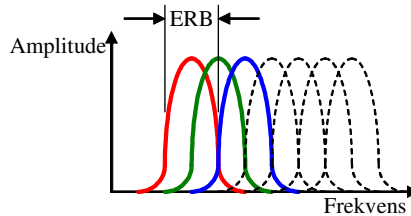
Det indre øre består i det væsentligste af *basilmembranen*, der påvirkes af de bevægelser som lyden forårsager i væsken. Membranen, der er 35 mm lang, er let og stiv tæt på det ovale vindue og ændrer gradvis karakter så den bliver tung og blød i den modsatte side. Denne egenskab sikrer at membranen kan gå i resonans ved høje frekvenser ved starten af membranen og i resonans ved de lave frekvenser nær enden af membranen. Et komplekst

signal deles derved op i sine frekvenskomponenter så *frekvens* transformeres til *position*. Der er mange nerver forbundet til basilarmembranen, og de giver et signal som er proportional med amplituden af signalet på det pågældende sted af membranen og, op til cirka 5 kHz, også i fase med det indkomne signal. Hjernen benytter nervesignalerne til at danne sig en opfattelse af det indkomne signal.

Frekvensopløsningen i basilarmembranen er kompliceret, men en simpel model opfatter membranen som opdelt i et antal smalbandsfiltre, der går i resonans indenfor hver sit smalle frekvensbånd. Bredden af dette frekvensbånd betegnes ERB, der står for Equivalent Rectangular Bandwidth, hvor en gennemsnitsværdi for øret er (Moore, side 73):

$$ERB = 24,7\text{Hz} + 0,108 \cdot f$$

Dette filtersystem er betydende for, om to nærliggende toner (f_1 og f_2) kan opfattes som enkelttoner, der derved indgår i en samklang, eller om tonerne kombineres til en enkelt, amplitudemoduleret tone med en frekvens på $(f_1 + f_2)/2$ og en modulationsfrekvens på $f_1 - f_2$.



Figur 54 – Model af ørets frekvensanalysator med faste smalbandsfiltre, relateret til hver sin position på basilarmembranen.

Frekvensopløsningen er cirka 133 Hz ved 1 kHz, hvilket svarer til 1/7 af tonens frekvens f . Frekvensdifferensen ved den lille tert (6:5) er større end dette (1200 Hz og 1000 Hz giver differensen 200 Hz) og tonerne kan opfattes som en samklang mellem to individuelle toner. Frekvensdifferensen ved en stor sekund (9:8) er mindre end ERB (1125 Hz og 1000 Hz giver differensen 125 Hz) og tonerne opfattes da som en amplitudemoduleret tone – lyden vibrerer.

Frekvensopløsningen er cirka 36 Hz ved 100 Hz svarende til 1/3 af tonens frekvens, så mindre intervaller end en kvint (3:2) vil ikke opfattes som enkelttoner. Det svarer til musikteoriens oplysning om, at akkorder ikke lyder godt i bassen – det ”mudrer”.

5.2 Harmoniske overtoner

For to toner med et frekvensforhold udtrykt ved heltal er tonerne sammenfaldende med de harmoniske overtoner for en grundtone. For eksempel er tonerne i den store tert (5:4) identisk med henholdsvis femte og fjerde harmoniske til en tone med en frekvens to oktaver under den dybe tone (5:4:1). Den dybe tone eksisterer ikke i det oprindelige materiale, men kan alligevel høres idet den dannes af ørets ulinearitet. Dette forhold bliver fra tid til anden udnyttet af moderne komponister for at opnå specielle klanglige effekter. For andre forhold mellem tonerne vil de referere til de harmoniske overtoner af en dyb grundtone, hvilket høres som en amplitudemoduleret indhylningskurve.

6 Referencer

Nakhlé H. Asmar: *Partial Differential Equations*, Second Edition, 2004, Pearson Prentice Hall.

W: Marshall Leach: *Introduction to Electroacoustics & Audio Amplifier Design*, 2003, Kendall/Hunt Publishing Company.

Brian C. J. Moore: *An Introduction to the Psychology of Hearing*, Fifth Edition, 2004, Elsevier Academic Press.

Knud Rasmussen: *Klassisk Lineær Akustik*, Laboratoriet for akustik, 1991, Note 2201.

Murray R. Spiegel: *Mathematical Handbook of Formulaes and Tables*, 1991, Schaum's Outline Series.

Jørgen Sylvest: *Akustiske forhold I blæseinstrumenter*, Speciale ved Syddansk Universitet, 2003.

Lennart Råde og Betritil Westergren: *Mathematics Handbook for Science and Engineering*, Fifth Edition, 2004, Studentlitteratur.