

OM SELVINDUKTION

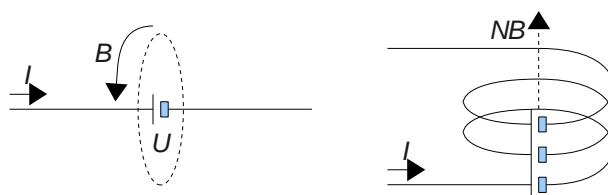
Spoler finder mange anvendelser; fra delefiltre i højttalere til afstemte kredsløb i radiomodtagere, men spolen optræder også ved trådviklede modstande og for tilledningen til enhver komponent. Selv ved montage på et printkort er der en serieinduktion, idet kobberbanen udgør en tilledning. Uanset hvordan spolen optræder er den grundlæggende teori den samme, og i denne artikel gives vises hvordan man kan beregne selvinduktion af en spole uden magnetisk kerne – en *luftspole*.

Det er desværre ikke muligt at garantere imod fejl, så hvis du finder en fejl i min argumentation, er du velkommen til at kontakte mig på mail@torean.dk. Dokumentet kan frit kopieres, enten i uddrag eller i sin helhed (copy left). Det er skrevet under *Ubuntu 9.10* med *Open Office 3.1*.

Hvad er selvinduktion

Enhver elektrisk komponent er omgivet af et magnetfelt når der løber en strøm igennem den, og magnetfeltet påvirker funktionen af komponenten. Det er ganske uanset om det er en ledning, en modstand, en kondensator, en diode eller kobberbanen på et printkort. Påvirkningen viser sig som en spænding i serie med det spændingsfald der ellers ville være over komponenten. En påført virkning kaldes for induceret og heraf navnet på begrebet: *Induktion*.

Spændingsfaldet over en ledning er derfor ikke alene givet af den strøm der løber igennem dens modstand (og som er givet ved Ohms lov), men er også givet af det omgivende magnetfelt. Mere præcist er det hastigheden magnetfeltet varierer med, der giver et spændingsfald over ledningen, så spændingens værdi er proportional med hvor hurtigt magnetfeltet ændres. Derfor ses det mest ved høje frekvenser, hvor magnetfeltet varierer hurtigt, eller ved abrupte ændringer i strømmen; for eksempel i tilslutningerne til logiske kredsløb og switch-mode strømforsyninger.



Figur 1 – Strømmen I giver anledning til magnetfeltet med styrken B omkring en leder og en ændring i magnetfeltet på ΔB giver et spændingsfald ΔU der ligger i serie med lederen og som er givet ved hastigheden magnetfeltet ændres med (vist som symbolet på et batteri).

Vikles ledningen op i en løkke vil strømmen I generere et magnetfelt på B , og vikles den op i N løkker vil det samlede magnetfelt blive NB . Ændres magnetfeltet i hver løkke med ΔB indenfor et vist tidsrum giver det en spændingsændring på ΔU i hver løkke. Den samlede ændring er $N\Delta B$, så hver af løkkerne får spændingsfaldet $N\Delta U$, og da der er N løkker i spolen bliver det tilsammen på $N^2\Delta U$. Det illustrerer hvorfor det er så effektivt at vikle tråden op til en spole, og da det er tråden selv der inducerer spændingen kaldes det: *Selvinduktion*.

Alle formler for beregning af selvinduktion indeholder den magnetiske konstant $\mu_0 = 1,26 \mu\text{H/m}$, der også kaldes *permeabiliteten* for vakuum. Enheden antyder at formlen skal indeholde en dimension for spolen, og det er oplagt at anvende dens diameter til udtrykket $L = \mu_0 d N^2$, der kommer tæt på det korrekte. For at beskrivelsen skal være korrekt er det nødvendigt at magnetfeltet fra hver løkke når igennem samtlige løkker. I praksis spredes feltet så kun en del af magnetfeltet når frem til alle løkker og den samlede virkning bliver mindre end N^2 . Det kan repræsenteres af en korrektionsfaktor K , der afhænger af spolens geometri. En spole med få og tætsiddende vil have en højere værdi af K end en lang spole med mange vindinger, hvor koblingen mellem de fjerneste vindinger er ringe. Værdien af K er cirka 2,5 for en spole med én vinding, og den er under 0,5 for en lang spole.

$$L = \mu_0 d N^2 K \quad \text{hvor} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

Trådens interne selvinduktion

Alle spoler vikles med en tråd, der ikke er uendelig tynd, og den bidrager med en selvinduktion fra feltet inde i lederen. Ved lave frekvenser er strømmen jævnt fordelt over lederens tværsnit, og feltet vokser i styrke fra nul i centrum af lederen til en maksimalværdi ved overfladen, og dette felt giver en selvinduktion, som her kaldes L_1 med en typisk værdi omkring 50 nH per meter tråd.

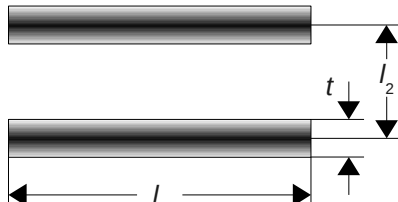
$$L_1 \leq \frac{\mu_0 l_T}{8\pi} \Rightarrow L_1 \approx (50 \text{ nH/m}) \cdot l_T \quad \text{for } f < 20 \text{ kHz} \quad \text{og} \quad l_T \approx 2l_1 + \pi d N$$

For en beregning af L_1 medgår den totale længde af tråd l_T ; det vil sige såvel den tråd spolen vikles af, som den eksterne tråd i tilledningen. Tråden på spolen er tilnærmelsesvis givet ved omkredsen gange antallet af vindinger ($\pi d N$). I formlerne er l_1 længden af tilledningen, og faktor 2 skyldes at der er to ledere. Ved høje frekvenser fortrænges strømmen fra det indre af lederen og løber fortrinsvis i et tyndt bånd nær overfladen af tråden. Feltet nærmer sig nul i midten af lederen og værdien af L_1 aftager. Denne effekt kaldes for *strømfortrængning*, og den begrænser tykkelsen af det ledende lag til de yderste 0,5 mm ved 20 kHz, så selvinduktionen er som angivet op til 20 kHz for den typiske dimension af ledninger. Det ledende lag er reduceret til 0,1 mm ved 1 MHz, så det er derfor ikke nødvendigt at tage hensyn til den interne selvinduktion ved kredsløb, der kun opererer ved høje frekvenser, som for eksempel radiomodtagere.

Tilledningens selvinduktion

Spolen kan ikke forbindes til noget som helst uden en tilslutning, og den introducerer også en vis selvinduktion, der her kaldes L_2 . Værdien er givet af tilledningens længde l_1 , afstanden mellem de to ledere l_2 og trådtykkelsen t , og den er med cirka 1 μH per meter af ganske stor betydning.

$$L_2 = \frac{\mu_0 l_1}{\pi} \ln\left(\frac{2l_2}{t}\right)$$

$$l_1 \gg l_2 \gg t$$


Figur 2 – Et almindeligt kabel med to ledere udgør spole med en selvinduktion.

Selvinduktionen skyldes at to parallelle ledere i en vis indbyrdes afstand kan opfattes som en lang og smal spole, der afgrænser et areal. Selvinduktionen er mindst ved lille areal, det vil sige korte og tætliggende ledere, så det kan betale sig at sno lederne sammen hvis tilledningen er lang.

Selvinduktionen vil også optræde i forbindelse med de andre komponenter end lige spoler; for selve tilledningen, som kan være kobberbanen på et printkort, fungerer helt på samme måde. Det er med andre ord umuligt helt at undgå en vis selvinduktion.

Resulterende formel

Den resulterende formel for selvinduktionen består følgelig af tre led: ét for lederen selv (L_1), ét for tilslutningen til spolen (L_2), hvilket vil sige hele det eksterne kredsløb, og endelig ét for spolen, som er givet ved dens geometri. Det betyder at alle formler i denne artikel skal benyttes som følger, hvor K fremgår af de matematiske udtryk for spolen.

$$L_{RES} = L_1 + L_2 + \mu_0 d N^2 K$$

Opgaven er at bestemme nogle anvendelige udtryk for K , og formlerne på de følgende sider giver et bud på hvordan det kan gribes an.

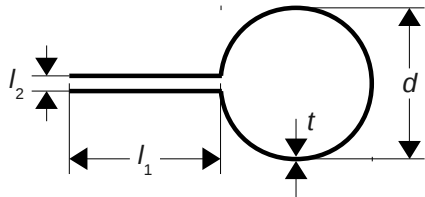
FORMLER

Dette afsnit angiver formler for luftspoler.

Simpel spole

Den simpleste spole består af én enkelt vinding med diameteren d og trådtykkelsen t , og den har en selvinduktion L_S givet ved nedenstående udtryk, der ikke inkluderer selvinduktionen fra tråden eller tilslutningen (L_1 og L_2), der beregnes som vist på de foregående sider og i eksemplet herunder. For spoler med tynd tråd ($t < d/100$), eller hvor præcisionen af beregningen ikke er specielt vigtig, kan konstanten sættes til $c = 1$, ellers kan værdien beregnes som vist.

$$L_S = \frac{\mu_0 d}{2} \ln\left(\frac{1,07 c d}{t}\right)$$

$$c = \exp\left(\frac{-\pi t}{d}\right)$$


Figur 3 – En simpel spole med lederen bukket i cirkelform og tilledningen vist.

Ved diameteren $d = 100t$ er $c = 0,969$ og talværdien af 1,07 gange c bliver 1,04 hvilket giver en reduktion af den beregnede selvinduktion på 0,7 %.



Figur 4 – Skiveformet spole viklet med fire vindinger af isoleret tråd på en cirkulær træform med diameteren 0,179 m og 1 m længde af tilslutningen, der er løst snoet for at mindske det uundgåelige bidrag. Selvinduktionen er målt til 7,9 μH på en målebro ved 10 kHz.

Formlen L_S kan principielt ikke anvendes for spoler med mere end én enkelt vinding, idet der ikke tages hensyn til den mangelfulde kobling mellem vindingerne. Det er selvfølgelig muligt at benytte formelen alligevel og kompensere for den ringe kobling mellem vindingerne, ved at erstatte faktoren 1,07 til diameteren med én (det reducerer selvinduktionen med cirka 1,5 %), og trådtykkelsen med den største af dimensionerne af kabelbundet (t_{RES}). Det er lidt klip en tå og hug en hæl, men det giver et rigtig godt udtryk, hvor der dog ikke kan garanteres en nøjagtighed.

$$L_{SIMPEL} \approx \frac{\mu_0 d N^2}{2} \ln\left(\frac{d}{t_{RES}}\right)$$

Eksempel 1. Spolen i figuren har $N = 4$ vindinger, diameteren er $d = 0,180$ m regnet fra centrum til centrum af tråden, og trådtykkelsen er $t = 0,5$ mm med en isolationskappe af samme tykkelse. De fire vindinger ligger i forlængelse af hinanden, så den resulterende spolelængde bliver afstanden mellem vindingernes centre (3 gange 1,5 mm) plus trådtykkelsen (0,5 mm) til $t_{RES} = 5$ mm. Den beregnede selvinduktion bliver $L_{SIMPEL} = 6,5$ μH . Længden af tilledningen er $l_1 = 1$ m med en antaget indbyrdes afstand på $l_2 = 5$ mm (løst snoet tråd) så tilledningen giver $L_2 = 1,2$ μH . Den samlede længde af tråd består af $\pi d N = 2,3$ m fra spolen og 2 m fra tilledningen til i alt $l_T = 4,3$ m, så der er et bidrag herfra på $L_1 = 0,2$ μH . Selvinduktion beregnes til $L = L_1 + L_2 + L_{SIMPEL} = 7,9$ μH , der i dette tilfælde rammer i plet.

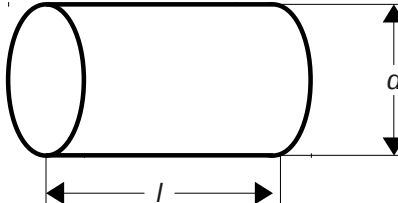
Cylindrisk spole

En af de mest citerede spoleformler på internettet er Wheelers formel, der her gengives som L_W . Under de rette forudsætninger er formelen indenfor $\pm 0,33\%$ og den går imod den teoretiske værdi ved stor længde af spolen, hvilket givetvis har medvirket til dens popularitet. Ved meget korte spoler er den imidlertid ikke brugbar, idet den kun kan benyttes for en længde ned til 40 % af spolens diameter (dog ned til 30 % ved en afvigelse på -2%). Matematikken bag ved den cylindriske spole kan dog give et godt bud på en formel for en kort spole, hvor længden er højst 35 % af diameteren. Den er vist nedenfor som L_K og er korrekt indenfor $\pm 2\%$.

$$L_W = \frac{\pi}{4} \frac{\mu_0 d^2 N^2}{l + 0,45d} \quad \pm 0,33\% \text{ ved } l \geq 0,4d$$

$$L_K = \frac{\mu_0 d N^2}{2} \ln\left(\frac{2,43d}{l}\right) \quad \pm 2\% \text{ ved } l \leq 0,35d$$

For begge spoler: $l = Nt$ og $t \ll d$



Figur 5 – Cylinderformet spole med beviklingen i et enkelt lag. Formlerne passer bedst til en spole med meget tynd bevikling, og helst kun ét lag med meget tynd tråd.

Nu får man desværre intet foræret i denne verden, og problemet med formlerne er, at de kun gælder for en cylinder, der består af en tynd folie. Matematikken antager simpelt hen, at spolen er uden en tykkelse og at strømmen løber jævnt fordelt i cirkulære baner med en samlet styrke på NI . Det kan selvfølgelig relateres til en fysisk realiserbar spole ved at dele cylinderen op i N bånd med bredden t , der hver bærer strømmen I . Problemet er blot at spolen i praksis vikles i spiralform, så strømmen er ikke cirkelformet, og den har desuden en tykkelse, hvilket er i klar modstrid med den matematiske forudsætning. Hvordan man end argumenterer, så vil formelen kun kunne forventes at gælde for en spole med meget tynd tråd i et enkelt lag, og det efterlader så et nyt problem med at bestemme en tilladelig tråddykkelse. Ved det tidligere afsnit var der en fejl på $0,7\%$ ved en tråd der udgør 1% af spolens diameter, og hvis den relation også holder stik her, så må man forvente at tråddykkelsen skal være mindre end $0,5\%$ af diameteren for at nå den angivne præcision på $0,35\%$.



Figur 6 – Kort cylindriske spole med 25 vindinger, tråddykkelsen $0,5\text{ mm}$ og en indre diameter på 32 mm . Leverandøren har oplyst den målte selvinduktion for to spoler til $24,2$ og $24,5\ \mu\text{H}$, så gennemsnittet er $L = 24,35\ \mu\text{H}$ med en variation på $\pm 0,15\ \mu\text{H}$, hvilket indikerer at præcisionen af målingen kan forventes at være ringere end $\pm 0,6\%$.

Eksempel 2. Spolen i figuren har $N = 25$ vindinger, diameteren er $d = 32,5\text{ mm}$ regnet fra centrum til centrum af tråden, og tråddykkelsen er $t = 0,5\text{ mm}$ med en tynd isolation, så længde er $l = 12,5\text{ mm}$. Den beregnede selvinduktion er $L_W = 24,0\ \mu\text{H}$. Længden af tilledningen er $l_1 = 0,2\text{ m}$ og med den indbyrdes afstand antaget til $l_2 = 5\text{ mm}$ (meget løst snoet) bliver $L_2 = 0,24\ \mu\text{H}$. Den samlede længde af tråd består af $\pi dN = 2,6\text{ m}$ fra spolen og 2 gange $0,2\text{ m}$ fra tilledningen til i alt $l_T = 3\text{ m}$, så der er et bidrag på $L_1 = 0,15\ \mu\text{H}$. Selvinduktion bliver $L = L_1 + L_2 + L_W = 24,4\ \mu\text{H}$, så fejlen er med $0,2\%$ indenfor den indikerede usikkerhed. Det er interessant at trådens tykkelse udgør hele $1,5\%$ af diameteren.

Eksempel 3. Benyttes formelen for kort spole findes $L_K = 23,5\ \mu\text{H}$ og med de to bidrag fra tråden og tilledningen inkluderet findes $L = 23,9\ \mu\text{H}$, der er mindre end 2% fra den korrekte værdi.

Luftspoler

Det kan undre at formlen har faktor 2,43 i logaritmens argument mens formlen for en simpel spole har faktor 1,07; det indikerer en modstrid, men der er en forklaring derpå. Formlen for en simpel spole er udviklet ud fra antagelsen om at spolen kun består af én enkelt vinding med en vis tykkelse, hvorimod formlen for kort spole benytter en cylinder med en uendelig tynd folie. Derfor er problemet ikke, at der er to forskellige formler, men at træffe en beslutning om, hvorvidt den spole man har for hånden mest ligner den ene eller den anden af modellerne. Er man i tvivl om valget, kan benytte begge modeller og tage gennemsnittet.

Formlen for den korte spole L_K kan udvides til at gælde for en spole med en længde, der er lig med diameteren ved at inkludere et korrigerende led. Nøjagtigheden af udtrykket kommer tæt på den teoretiske fejl ved Wheelers formel, så de to udtryk kompletterer hinanden.

$$L_{KK} = \left[1 + 0,2 \left(\frac{l}{d} \right)^2 \right] L_K, \quad \begin{array}{l} \pm 0,6\% \text{ ved } l \leq 0,9 d \\ -1,5\% \text{ ved } l = d \end{array}$$

Eksempel 4. For eksemplets spole bliver værdien af korrektionen 1,03 så den beregnede værdi øges til $L_{KK} = 24,22 \mu\text{H}$. Med de to bidrag fra tråden og tilledningen findes en værdi på $24,61 \mu\text{H}$, der nu er blot 1 % fra det korrekte (og denne gang er værdien i overkanten).

Formlen for en cylindrisk spole findes i et antal varianter på internettet, hvor den største forskel er konstanten til diameteren. Et rigtig godt kompromis vises nedenfor; det er ikke helt så præcist som Wheelers formel, men det kan til gengæld anvendes for spoler med en længde ned til 10 % af diameteren, og den dækker derfor hovedparten af spoler med tråden i et enkelt lag.

$$L_N = \frac{\pi \mu_0 d^2 N^2}{4 l + 0,42 d} \quad \begin{array}{l} \pm 3,5\% \text{ ved } l \geq 0,125 d \\ -6\% \text{ ved } l = 0,1 d \end{array}$$

Eksempel 5. Den samme spole som ovenfor giver værdien $L_N = 24,9 \mu\text{H}$ og med bidragene fra tråden og tilledningens løkke findes $L = 25,3 \mu\text{H}$, der er 4 % for højt.

For spoler, hvor tværsnittet ikke er cirkulært, kan diameteren erstattes af det areal spolen danner. Hvis spolen er rektangulær med sidelængderne a og b er arealet af spolen $A = ab$, og arealet af den cirkulære spole ($A = \pi d^2/4$) erstattes så blot med arealet af den aktuelle spole. Formlen kan med andre ord omskrives til en spole med en anden geometri, som vist nedenfor, hvor forudsætningen er, at den aktuelle spole ikke er alt for ekstrem i sin udførelse.

$$L_N = \frac{\mu_0 A N^2}{l + 0,42 d}$$

Der kan ikke garanteres noget om den præcision formlen vil give, så for de mere specielle spoler er det (desværre) nødvendigt at bygge spolen og måle selvinduktionen. Det er selvfølgelig muligt at benytte formlerne som et første gæt på hvor mange vindinger der skal benyttes, hvis der er et krav om en vis selvinduktion.

Som det fremgår af teksten og eksemplerne, er der ikke én enkelt formel, som bare er korrekt. Alle formler er udviklet ud fra en antagelse, der gør det muligt at opnå en matematisk perfektion, som er krævet for at kunne løse ligningerne. Problemet er, at det ikke er muligt at realisere disse antagelser i praksis, så beregningen vil være en tillempling af matematikken til virkeligheden.

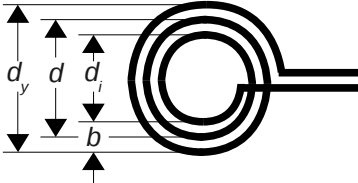
Sagt på en anden måde, så skal man ikke forvente en nøjagtighed på 1 % uanset hvor fin en formel man har fat i. Formlerne kan let drille og mange problemer kan føres tilbage til en upræcis måling af spolens dimensioner. Min erfaring er at fejl på $\pm 10\%$ er ganske typiske, så man skal ikke stole blindt på beregningerne. Står man i den situation, at en spole skal være meget præcis, så er det bydende nødvendigt at kunne måle selvinduktionen; formlerne er blot en god vejledning til at designe spolen.

Skivespolen

Spolen har beviklingen liggende som en spiral i et plan og selvinduktionen beregnes efter den følgende formel, som tilskrives Wheeler¹. Her er N antallet af vindinger, d er den gennemsnitlige diameter af spolen og b er tykkelsen af beviklingen, og alle dimensioner regnes fra centrum til centrum af tråden, der har tykkelsen t . Den ydre diameter er D_y (kan måles med en skydelære) og den indre diameter er D_i (hullet i centrum af spolen, som også kan måles med en skydelære). Tykkelsen af beviklingen kan beregnes som $b = Nt$, men kun hvis spolen er viklet helt tæt.

$$L_{ws} = \frac{\pi}{4} \frac{10 \mu_0 N^2 d^2}{4d + 11b}$$

$$d = \frac{d_y + d_i}{2}, \quad b = \frac{d_y - d_i}{2} = Nt$$

$$d_y = D_y - t, \quad d_i = D_i + t, \quad b = B - t$$


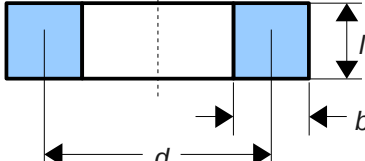
Figur 7 – Spiralspolen består grundlæggende set kun af to dimensioner idet tykkelsen er meget ringe og den egner sig derfor godt for opbygning på printkort. En spiralspole kan dannes på et printkort, hvis returlederen hentes over på den anden side af printkortet.

Wheeler angiver et fejlniveau på 5 % ved tæt bevikling, men der rapporteres op til 20 % fejl ved brug af formlen når der er en stor afstand mellem lederene. Der er ingen relation til tråddykkelsen, hvilket indikerer en vis usikkerhed med hensyn til beregningens nøjagtighed.

Brooks coil

Et af problemerne ved en reel spole er, at den laveste værdi af impedansen er DC modstanden af spolens tråd. En god spole giver derfor mest mulig selvinduktion for mindst mulig DC modstand, og Brook fandt frem til, at et optimalt resultat opnås når beviklingen har et kvadratisk tværsnit og diameteren er lig med tre gange tykkelsen af beviklingen.

$$L_B = 0,676 \mu_0 N^2 d$$

$$d = 3b, \quad b = l$$


Figur 8 – Spolen med størst selvinduktion for en given længde tråd kaldes for "Brooks coil". Den har kvadratisk tværsnit af beviklingen og diameteren er tre gange siden i tværsnittet.

Forskellige kilder angiver samstemmende (eller ved direkte afskrift), at kravet om kvadratisk tværsnit kan afviges uden større problemer for formlens nøjagtighed. Præcisionen af formlen er dog ukendt, og det vides ikke om målene d , b og l refererer til de fysiske mål (der kan måles med en skydelære) eller de afledte mål, som vist ved formlen ovenfor.

1 Referencen viser formlen som $31,33 \mu_0 N^2 r^2 / (8r + 11b)$ hvor r er radius. Brug af diameter erstatter $8r$ med $4d$ i nævneren og konstanten $31,33$ deles med 4 på grund af kvadratet på radius ($r^2 = d^2/4$) til 7,83. Det er tæt på $10\pi/4 = 7,85$, og idet $\pi d^2/4$ er arealet af en cirkel, har Wheeler med stor sandsynlighed udtrykt formlen ved spolens areal og ikke ved radius.

Spole med bevikling i flere lag

For en spole med beviklingen i flere lag har Wheeler følgende formel, hvor spolens parametre (den gennemsnitlige diameter d , længden l og tykkelsen af beviklingen b) alle regnes fra centrum til centrum af tråden. Det er derfor nødvendigt at omsætte fra de målte værdier af ydre diameter D_y og indre diameter D_i samt ydre længde l_y , der alle kan måles med en skydelære.

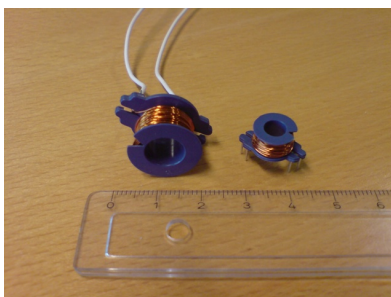
$$L_{WB} = \frac{\pi}{4} \frac{8 \mu_0 d^2 N^2}{3d + 9l + 10b}$$

$$d = \frac{d_y + d_i}{2}, \quad b = \frac{d_y - d_i}{2}$$

$$d_y = D_y - t, \quad d_i = D_i + t, \quad l = l_y - t$$

Ved samme dimension af spolen som ved Brooks coil ($d = 3b = 3l$) giver formlen helt det samme resultat, hvilket i det mindste er et godt udgangspunkt, men nøjagtigheden er ukendt.

Nedenfor vises beregningen for to spoler, der begge er viklet på en plastform. I begge tilfælde er den målte værdi af selvinduktion afrundet til to cifre, så den initiale præcision, der kan opnås ved en sammenligning er ikke bedre end $\pm 2\%$. Den første beregning ligger 2,5 % over den målte værdi, hvorimod den anden beregning er cirka 7 % under det målte, så det giver i det mindste en idé om den mulige præcision, uden at der dog kan givne en garanti.



Figur 9 – To eksempler på spoler med tykkelse af beviklingen. Spolerne har 100 vindinger og er bygget på kommercielt tilgængelige spoleforme med stifter for montage i et printkort. Spole nummer 1 vises til venstre og er målt på en målebros til $L = 83 \mu\text{H}$ ved 10 kHz. Spole nummer 2 vises til højre og er målt til $L = 57 \mu\text{H}$ under samme betingelser.

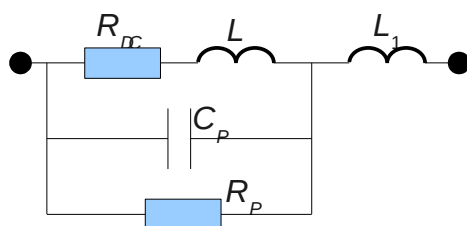
Eksempel 5. Spole 1 har $N = 100$ vindinger med de ydre mål $D_y = 13,7$ mm og $D_i = 9,8$ mm samt længden $l_y = 8,9$ mm. Trådens tykkelse er ikke kendt, men kan beregnes til $t = 0,35$ mm ved at antage at halvdelen af arealet i beviklingen er benyttet af tråden. De parametre, der skal benyttes i formlen er $d_y = D_y - t = 13,35$ mm, $d_i = D_i + t = 10,15$ mm og $l = l_y - t = 8,55$ mm. Herefter bestemmes spolens gennemsnitlige diameter til $d = 11,75$ mm og beviklingens tykkelse til $b = 1,60$ mm. Selvinduktionen beregnes efter formlen til $L_w = 85 \mu\text{H}$, der ligger 2,5 % over den målte værdi.

Eksempel 6. Spole 2 har $N = 100$ vindinger med de ydre mål $D_y = 9,3$ mm og $D_i = 5,0$ mm samt længden $l_y = 4,8$ mm. Tråden er den samme som før (0,35 mm). Parametrene er $d_y = D_y - t = 8,95$ mm og $d_i = D_i + t = 5,35$ mm samt længden $l = l_y - t = 4,45$ mm. Herefter bestemmes den gennemsnitlige diameter til $d = 7,15$ mm og beviklingens tykkelse til $b = 2,15$ mm og selvinduktionen beregnes efter formlen til $L_w = 52,8 \mu\text{H}$, der ligger 7 % under den målte værdi.

Dette afslutter præsentationen af formler for beregning af selvinduktion. Det følgende kapitel giver en introduktion til øvrige parametre, der er vigtige for en praktisk brug af spolen.

ELEKTRISK MODEL

Spolen er ikke en ideel komponent, som blot er induktiv. Spolen indeholder en DC modstand R_{DC} , som begrænser anvendelsen ved lave frekvenser, og en induktion L_1 på grund af den tråd spolen vikles af, og som påvirker spolens impedans ved høje frekvenser. En simpel model af spolen har selvinduktionen L i serie med R_{DC} og L_1 , men modellen inkluderer oftest en parallelkapacitet C_P , som begrænser anvendelsen ved høje frekvenser, og desuden en parallelmodstand R_P , der står for tab i spolen, for eksempel den energi der tabes ved kobling til omgivelserne. Det er R_{DC} og C_P der udgør de væsentligste problemer i praksis idet L_1 blot er en ekstra selvinduktion, og man kan som regel se bort fra R_P . Bemærk, at modellen ikke inkluderer selvinduktion fra det ydre kredsløb.



Figur 10 – Model af spolen. DC modstanden begrænser impedansen nedadtil og den parallelle kondensator giver resonans ved en høj frekvens hvorover spolen ikke er induktiv, men derimod opfører sig som en kondensator.

Ved lave frekvenser dominerer den elektriske modstand i den tråd spolen er fremstillet af og den er dominerende for spolens impedans. Værdien er givet ved trådens ledningsevne ρ , længden af tråden l_T og tværsnittet A eller tråddykkelsen t , og den kan bestemmes ved følgende formel, hvor den angivne værdi af ledningsevnen er for kobber ved stuetemperatur.

$$R_{DC} = \rho_{Cu} \frac{l_T}{A} = \rho_{Cu} \frac{4l_T}{\pi t^2}, \quad \rho_{Cu} = 0,0175 \cdot 10^{-6} \Omega m$$

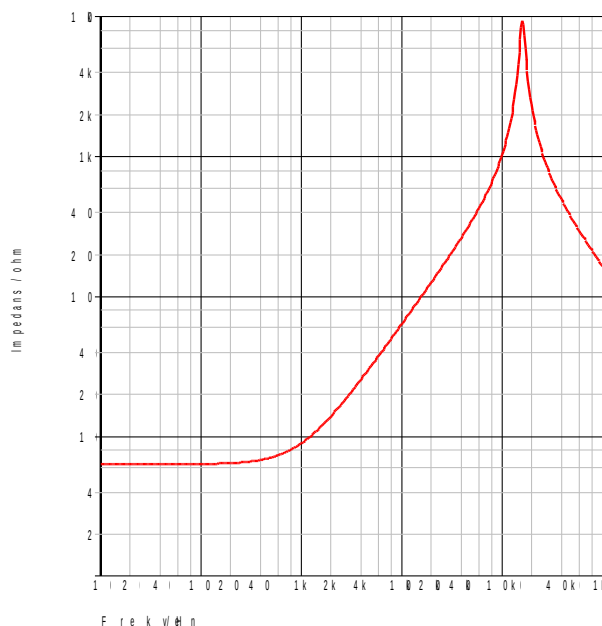
Spolen i Figur 6 har trådlængden $l_T = \pi dN = 2,6$ m og tråddykkelsen $t = 0,5$ mm, så modstanden bliver $R_{DC} = 0,23 \Omega$. For aluminium er ledningsevnen $\rho_{Al} = 0,0282 \cdot 10^{-6} \Omega m$ og for jern $\rho_{Fe} = 0,1 \cdot 10^{-6} \Omega m$. Data for andre materialer kan findes på internettet: Prøv fx Wikipedia med "Specifik modstand".

Den angivne værdi forudsætter at strømmen løber jævnt i hele trådens gennemsnit, men ved høje frekvenser fortrænges strømmen så den fortrinsvist løber i overfladen af lederen. Feltet inde i lederen formindskes og den interne induktion aftager mens modstanden stiger. Tykkelsen af det lag hovedparten af strømmen løber i kaldes δ og er givet ved trådens ledningsevne ρ , frekvensen f og den magnetiske konstant μ_0 som vist nedenfor (engelsk Wikipedia: "Skin effect"). Hvis lederen er af magnetisk materiale skal μ_0 erstattes af $\mu_R \mu_0$. Strømførtængningen angiver den afstand fra overfladen og ind i lederen hvori 63 % af strømmen løber, så man kan med en vis ret antage at strømmen løber i en cylinderskal med den angivne tykkelse. Eksemplet er for kobber.

$$\delta = \sqrt{\frac{\rho}{\pi \mu_0 f}} = \sqrt{\frac{0,0175 \cdot 10^{-6} \Omega m}{\pi (4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}) f}} \Rightarrow \delta \approx 67 \text{ mm} \sqrt{\frac{\text{Hz}}{f}}$$

Ved 50 Hz løber strømmen i de yderste 10 mm, og forklarer hvorfor kabler til højspænding ikke er over 2 cm i diameter; tykkere kabler ville være spild af materiale og i praksis består højspændingskabler da også af en kappe af aluminium med en stålwire i midten til at give styrke. Ved 20 kHz løber strømmen i de yderste 0,5 mm, så modstanden i en almindelig ledning kan antages at være som beregnet efter formelen for R_{DC} indenfor det hørbare område, og for kabler der ikke er over 1 mm tykke. Ved 1 MHz løber strømmen i et bælte på mindre end 0,1 mm og man kan gå ud fra at strømførtængningen nu helt har fjernet strømmen fra det indre af lederen (hvorved $L_1 \approx 0$).

Luftspoler



Figur 11 – Impedansen som funktion af frekvensen for en spole med parametrene $R_{DC} = 6,28 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$, $C_p = 1 \text{ nF}$ og $R_p = 10 \text{ k}\Omega$. Grænsefrekvenserne er $f_L = 1 \text{ kHz}$ og $f_H = 160 \text{ kHz}$.

Kurven er tegnet med SPICE simulatoren SIMetrix fra www.simetrix.co.uk som kan downloades gratis (MS Windows). Den gratis udgave har begrænsninger, men de er ikke et stort problem.

Ved middel frekvenser er det selvinduktionen, der bestemmer værdien af spolens impedans, efter den velkendte formel $X_L = 2\pi fL$, hvor f er frekvensen og L er selvinduktionen. Den nedre grænse er givet ved $X_L = R_{DC}$ som og i figuren er området vist som $f_L = 1 \text{ kHz}$.

$$f > f_L \quad \text{hvor} \quad f_L = \frac{R_{DC}}{2\pi L}$$

Ved høje frekvenser begrænser den parallelle kapacitet anvendelsen, men værdien af C_p er meget vanskelig at bestemme da den afhænger af den måde spolen er viklet på, og frekvensen, der måles ved. Spolen kan vikles i ét lag for at holde kapaciteten mellem vindingerne nede, eller den kan vikles i adskilte grupper af vindinger, hvorved kapaciteterne kobles i serie og reducerer den resulterende værdi. Den parallelle kapacitet går i resonans med spolens selvinduktion, og spolen kan ikke anvendes som en induktiv komponent ved denne eller højere frekvenser. I figuren er $f_H = 160 \text{ kHz}$

$$f < f_H \quad \text{hvor} \quad f_H = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_p}}$$

Modellen forudsætter at strømstyrken er den samme overalt i spolen, men det krav kan ikke være opfyldt ved høje frekvenser, hvor bølgelængden af signalet er stor i forhold til længden af den tråd spolen er viklet af. Som en tommelfingerregel er bølgelængden "meget stor" når den er 100 gange spolens trådlængde. Signalets hastighed i tråden sættes til lysets hastighed, hvilket er en grov tilnærmelse, men det er uden betydning her. For en cirkulær spole med diameteren d og N vindinger er trådlængden $l_1 \approx \pi dN$, så en "lang" bølgelængde kan beregnes til $\lambda = 100 l_1$, hvorved den øvre grænsefrekvens findes af følgende formel, hvor konstanterne i sidste led er regnet ud og afrundet.

$$f_{max} \lambda = c \Rightarrow f_{max} = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{100 \pi d N} \Rightarrow f_{max} \approx \frac{1 \text{ m}}{d N} \text{ MHz}$$

Spolen i Figur 6 har diameteren $d = 32,5 \text{ mm}$ og $N = 25$ vindinger, så den estimerede øvre grænse for spolen er derfor på $f_{max} = 1,2 \text{ MHz}$ (værdien er kun orienterende).