

An English resume is offered on page 5.

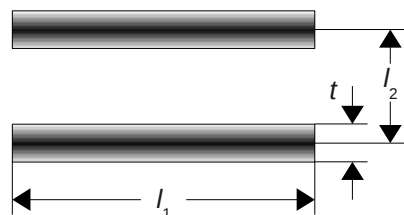
Ledere

En leder har ved lave frekvenser en intern selvinduktion L_1 som følge af feltet inde i lederen, men strømmen løber kun i de yderste 0,5 mm ved 20 kHz og 0,1 mm ved 1 MHz på grund af strømfortrængning, så selvinduktionen aftager med frekvensen og modstanden stiger. Et lederpar kan opfattes som en lang og smal spole hvor lederene afgrænser arealet $l_1 l_2$ og den har selvinduktionen L_2 som følge af feltet i arealet mellem lederne, så selvinduktionen er mindst ved tætliggende ledere. Den magnetiske konstant μ_0 (permeabiliteten for vakuum) er en eksakt værdi.

$$L_1 \leq \frac{\mu_0 l_1}{8\pi} = (50 \text{ nH/m}) \cdot l_1, \quad f < 20 \text{ kHz}$$

$$L_2 = \frac{\mu_0 l_1}{\pi} \ln\left(\frac{2l_2}{t}\right), \quad l_1 \gg l_2 \gg t$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$



Selvinduktionen beregnes fra trådlængden (L_1), tilslutningens løkke (L_2) og en af formlerne (L_x).

$$L = L_1 + L_2 + L_x$$

Simpel spole

Diameter d og trådtykkelse t . Kan benyttes for nogle få vindinger, hvis de ligger tæt og t er den samlede tykkelse af beviklingen (se side 34).

Praktisk formel for lave frekvenser hvor L_1 nu er inkluderet ($l_1 = \pi d$) og kun mangler tilledningens selvinduktion L_2 . Se også Maxwell side 54.

$$L_{K0} = \frac{\mu_0 d N^2}{2} \ln\left(\frac{1,07 d}{t}\right), \quad t \leq 0,03 d$$

$$N < 10$$

$$L = L_2 + \frac{\mu_0 d N^2}{2} \ln\left(\frac{1,38 d}{t}\right), \quad f < 20 \text{ kHz}$$

Enkeltlags spole

En cylindrisk spole har beviklingen med N vindinger liggende i et enkelt lag (eventuelt N_R lag). Diameteren beregnes fra indre og ydre diameter (d_1 og d_2), ydre længden er l og trådtykkelsen t . Tykkelsen af beviklingen skal være lille. Formlen L_N benyttes for spoler med en længde større end $1/10$ af diameteren og Wheelers formel L_W giver højere præcision for længere spoler. Korte spoler beregnes efter L_{K1} ned til en minimum længde og L_{K2} giver højere præcision. Spoleformen skal være af ikke-magnetisk og ikke-ledende materiale som luft, træ eller plast.

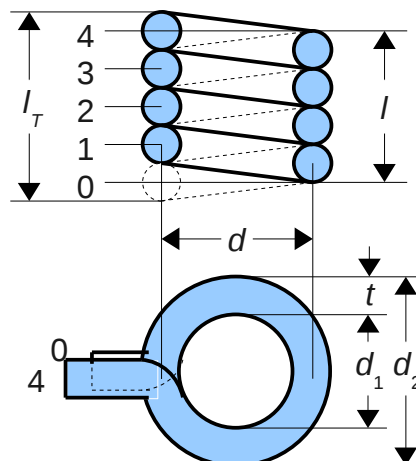
$$L_N = \frac{\pi \mu_0 d^2 N^2}{4 l + 0,42 d} \quad \begin{array}{l} \pm 3,5\% \text{ ved } l \geq 0,125 d \\ -6\% \text{ ved } l = 0,1 d \end{array}$$

$$L_W = \frac{\pi \mu_0 d^2 N^2}{4 l + 0,45 d} \quad \begin{array}{l} \pm 0,33\% \text{ ved } l \geq 0,4 d \\ t \ll d \end{array}$$

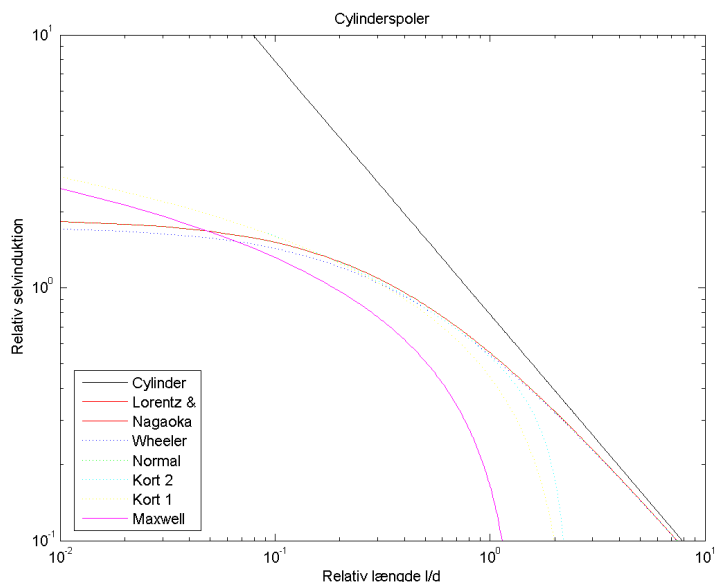
$$L_{K1} = \frac{\mu_0 d N^2}{2} \ln\left(\frac{2,43 d}{l}\right) \quad \begin{array}{l} \pm 2\% \text{ ved } l \leq 0,35 d \\ \text{Mindst } l \approx 0,03 d \end{array}$$

$$L_{K2} = \left[1 + 0,2 \left(\frac{l}{d}\right)^2\right] L_{K1}, \quad \begin{array}{l} \pm 0,6\% \text{ ved } l \leq 0,9 d \\ -1,5\% \text{ ved } l = d \end{array}$$

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2} = d_1 + t, \quad \begin{array}{l} l = Nt \\ l_1 \approx N \pi d + N_R l + \text{tilslut} \end{array}$$

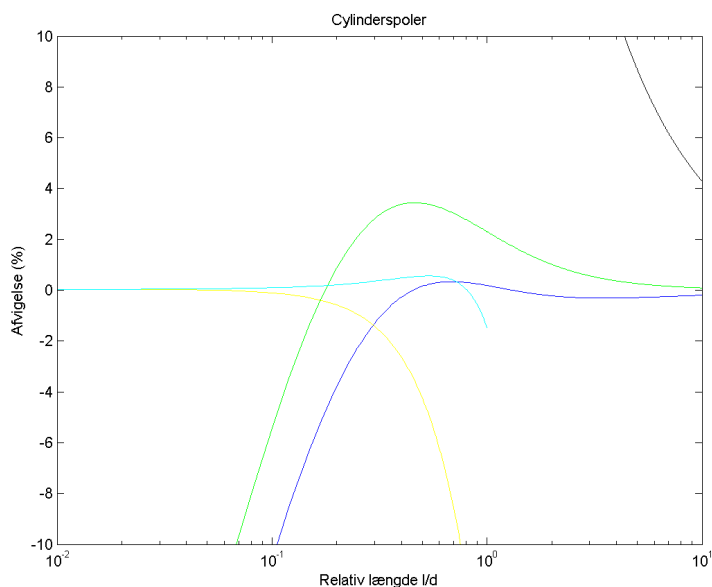


Formlerne sammenlignes i Figur 1 med den teoretisk ideelle værdi for cylinderspølen som angivet efter Lorentz og Nagaoka (side 54) og afvigelsen herfra vises i Figur 2. Bemærk at den teoretisk ideelle værdi gælder for en cylinder med uendelig tynd folie og ikke for en bevikling med endelig tykkelse. Det er forklaringen for hvorfor Maxwells formel tilsyneladende ligger for lavt.



Figur 1 – Sammenligning mellem de forskellige formler fra artiklen og den teoretisk ideelle spole efter Lorentz og Nagaoka. For Maxwells formel er trådtykkelsen sat lig med længden.

Cylinderspølen har kun teoretisk interesse (L_S side 23). Formlerne *Normal* og *Wheeler* benyttes for beregning af reelle spoler (L_N side 25 og L_W side 59). Korte spoler (L_{K1} og L_{K2}) tager over for en beskeden spolelængde (se side 55). *Maxwell* (L_M) vises i referenceafsnittet (side 54).



Figur 2 – Den procentvise afvigelse fra det teoretisk ideelle. Farverne svarer til Figur 1.

Inden nøjagtigheden tillægges for meget betydning anbefales det at se eksemplerne på siderne 9-11, læse afsnittet side 12 om nøjagtighed og dertil referenceafsnittet side 54.

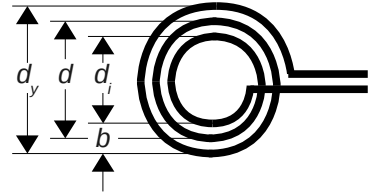
Skiveformet spole

For plane, skiveformede spoler med beviklingen liggende i en spiralform giver Wheelers formel et godt resultat. Den gennemsnitlige diameter af spolen d og tykkelsen af beviklingen b beregnes begge ud fra den indre diameter d_i og ydre diameter d_y . En alternativ udgave af formlen benytter en form-faktor F , der angiver tykkelsen af beviklingen i forhold til den gennemsnitlige diameter. Antallet af vindinger N er givet ved tykkelsen af beviklingen og den valgte trådtykkelse. Den totale ydre diameter, som kan måles med en skydelærer, er trådtykkelsen større end d_y og tilsvarende gælder for den indre diameter (D_y og D_i).

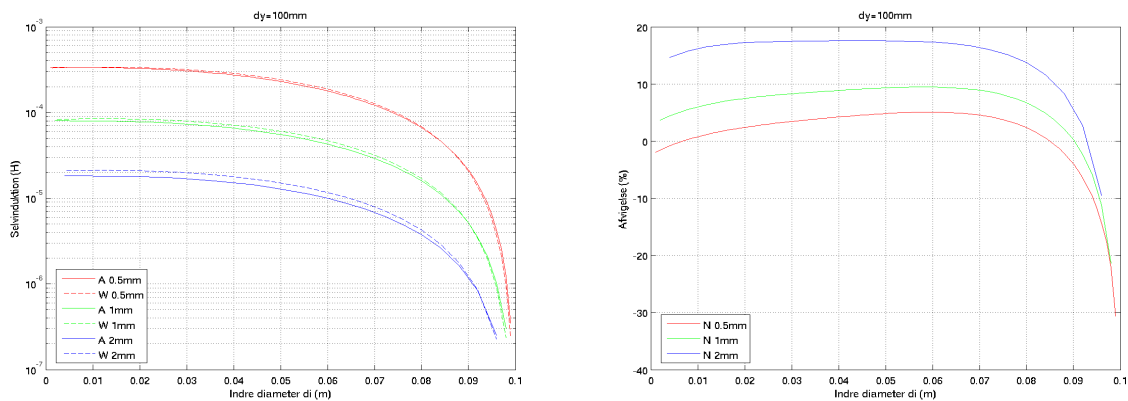
$$L_w = \frac{\pi}{4} \frac{10 \mu_0 d^2 N^2}{4d + 11b} = \frac{\pi}{4} \frac{\mu_0 d N^2}{0,4 + 1,1 F}$$

$$d = \frac{d_y + d_i}{2}, \quad b = \frac{d_y - d_i}{2}, \quad F = \frac{b}{d} = \frac{d_y - d_i}{d_y + d_i}$$

$$N = \frac{b}{t}, \quad D_y = d_y + t, \quad D_i = d_i - t$$



Wheeler angiver nøjagtigheden indenfor $\pm 5\%$, men ifølge andre kilder kan der forekomme 20% afvigelse. Nedenfor vises den beregnede afvigelse fra selvinduktionen beregnet ved algoritmen på side 49 for en spole med en ydre diameter på $d_y = 100$ mm og en indre diameter d_i fra nær nul til nær ved d_y og med trådtykkelsen som parameter. Selvinduktionen falder stærkt af for en indre diameter over cirka 80% af den ydre diameter fordi antallet af vindinger på spolen aftager.



Figur 3 – Til venstre vises selvinduktionen for Wheelers formel (stiplet linje) sammenlignet med en beregnet værdi (fuld linje). Til højre ses den procentvise afvigelse.

Trådtykkelsen indgår ikke i formlen efter Wheeler, men den har betydning for nøjagtigheden, og det bedste resultat opnås med en relativt tynd tråd. En designreglen angiver $d_y \approx 5d_i$ hvor hullet i midten af spolen er på 20% af den ydre diameter og det er ganske acceptabelt i forhold til analyseresultatet.

Flerlags spole

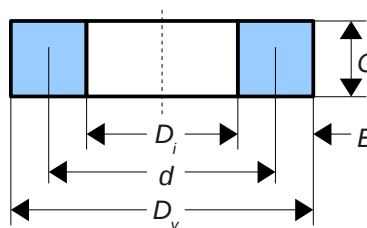
To formler¹ for spoler med tykkelse af beviklingen er *Brooks coil* (L_B) og en *Wheeler's formel* (L_W). Beviklingens tykkelse B og spolens længde C er ens for Brooks coil (kvadratisk tværsnit), mens Wheeler's formel tillader forskellig længde og tykkelse. De to formler giver samme resultat med samme dimensioner, og Wheeler's formel opfører sig pænt ved tynd bevikling (hvor formelen ideelt skal give samme resultat som cylinderspølen), men nøjagtigheden af de to formler er ukendt.

$$L_B = 0,676 \mu_0 d N^2$$

$$d = 3B = 3C = \frac{D_y + D_i}{2}$$

$$L_W = \frac{\pi}{4} \frac{8 \mu_0 d^2 N^2}{3d + 10B + 9C}$$

$$d = \frac{D_y + D_i}{2}$$



Det er uvist om formlerne benytter den fysiske ydre dimension (D_y og D_i) og endelig tråddykkelse eller om formlerne regner med centrum-til-centrum afstanden.

Dette afsnit er under revision.

¹ Formelmaterialet udvikles fra side 36 og frem hvor den gensidige induktion gennemgås og formler for beregning af koblingsfaktoren udvikles, og senere samles materialet i en generel formel for en spoles selvinduktion. Materialet er dog ikke færdigudviklet; den beregnede selvinduktion er i øjeblikket cirka 25 % for høj hvorfor algoritmen endnu ikke præciseres. Som nævnt i forrige fodnote er en revision af formelmaterialet på vej.

English resume

I have included this resume as a guide to readers with languages other than Danish. The internet offers free translation services (Google translate, for instance), which may assist you decoding selected parts of the document.

The article was initiated by a professional requirement of charging batteries using inductive transfer of energy. During the study I needed formulas for calculation of the self induction of air-coils and although the internet is loaded with formulas the vast majority were stated without any information regarding error level or application limitation thus seriously affecting the usefulness. Several of the references were lecture notes from universities but most often at the introductory level and offering only the derivation of the equation for the solenoid coil – again without any comments regarding the accuracy of the result. As a consequence I decided to review the magnetic theory and approach the subject using the material found on the internet as tour guide.

I am not an expert within the field of electromagnetic but I believe that the presented material is correct; however, I cannot guarantee accuracy or applicability. In the case you detect an error, or you encounter dubious information, please don't hesitate to forward the information to me.

Formulas

Page 1 – A collection of formulas are presented with the conductor itself being considered first. The self induction of the conductor is L_1 at low frequencies and is reduced toward zero for frequencies above approximately 20 kHz due to the skin effect (see page 14). The self induction of a pair of wires with length l_1 and width l_2 is L_2 and may represent the connection wire to the coil.

The self induction of a simple coil with one turn is called L_{K0} within this article, and may be used for a couple of turns if arranged in close proximity.

A collection of formulas are presented with the turns arranged in one single layer using a cylindrical coil, commonly known as the solenoid coil. A very useful formula is the "Normal coil" L_N (page 56), which offers an error level of $\pm 3.5\%$ with the length downward limited to one-eighth of the diameter, and it can be used to one-tenth with an error of -6% . An adjustment of the formula generates the well-known Wheelers formula L_W (page 59), which is stated to within $\pm 0.33\%$ if the length is at least 0.4 times the diameter. For even shorter coils two logarithmic equations are presented with onset from the Lorentz and Nagaoka formula (see page 54). The first formula (L_{K1}) is within 2% for coil length not exceeding one-third of the diameter, and an improved formula (L_{K2}) is less than 0.6% off for coil length less than 0.9 times the diameter and the formula can be used for coil length up to the same length as the diameter with an error of -1.5% .

Page 2 – The formulas are compared to the theoretical ideal.

Page 3 – A formula for the spiral-shaped coil with outer diameter d_o and inner diameter d_i due to Wheeler is presented and compared to an algorithm developed at page 49. An optimum shape is around $d_o = 5d_i$ with fairly thin wire thickness.

Page 4 – Two formulas are presented for coils with several layers. They are grabbed from the internet and no further data is available at present time.

Theory

The magnetic theory is introduced on page 17 starting from Ampere's law and a coil build using long parallel wires is presented on page 21. The law of Biot and Savart is shown on page 26 and leads to equations for short coils and also stating the dependency to distance. Mutual inductance is introduced at page 36, and leads to an algorithm on page 49 for the spiral coil and work is being prepared for a general coil on page 52 but the result is not yet released.

The reference formulas are considered on page 54, with special focus on the cylindrical coil with one layer (solenoid). It should be noted that the Lorentz and Nagaoka formulas assume the coil being represented by a thin sheet of conducting material and not a spiral of wire with thickness. This "current sheet" is valuable for coils with some minimal length but the formula will not be correct for coils with almost zero length, such as the coil with one turn. Hence, the analysis of the Maxwell formula (page 54). The formula for L_N is derived on page 56 and Wheelers formulas for coils with non-zero layer thickness are considered at page 59.

Indholdsfortegnelse

Introduktion.....	7
Om selvinduktion.....	7
Eksempler.....	9
Skiveformet spole.....	9
Kort cylinderspole.....	10
Lang cylinderspole.....	11
Spolens parametre.....	12
Nøjagtighed.....	12
Elektrisk model.....	14
Elektromagnetisme.....	17
Selvinduktion.....	17
Magnetisk flux.....	18
Amperes lov.....	18
Enkelt leder.....	19
Dobbelt leder.....	21
Cylinderspole.....	23
Normal spole.....	25
Biot og Savarts lov.....	26
Enkelt leder.....	26
Cirkulær leder.....	27
Afstandsregel.....	28
Simpel spole.....	31
Magnetisk fluxtæthed.....	31
Magnetisk flux.....	33
Selvinduktion.....	34
Selvinduktion.....	36
Gensidig induktion.....	36
Koblingsfaktor.....	37
Spole med to vindinger.....	38
Spole med mange vindinger.....	38
To vindinger i samme plan.....	40
To vindinger i lille afstand (under revision).....	42
To vindinger i stor afstand.....	46
To vindinger i vilkårlig afstand (under revision).....	47
Algoritme.....	49
Skivespole.....	49
Generel spole (under revision).....	52
Referenceformler.....	54
Maxwells formel.....	54
Cylinderspolen.....	54
Kort spole.....	55
Normal spole.....	56
Wheelers formler.....	59
Cylinderspolen.....	59
Skivespolen.....	61
Generel spole.....	61
Brooks coil.....	62
Appendiks.....	63
Magnetisk fluxtæthed – Leder.....	63
Magnetisk fluxtæthed – Spolens tværsnit.....	65
Magnetisk flux.....	69
Sensitivitet.....	74
Lang spole.....	74
Wheelers formel.....	75
Kort spole.....	76
Referencer.....	77

INTRODUKTION

Jeg fik ved et job som opgave at bestemme den elektriske effekt en spole kunne overføre til et mindre elektronikprodukt for at oplade dets batteri. Opgaven blev løst, men de formler jeg fandt frem til for beregning af spolens selvinduktion var ikke gode, så jeg blev interesseret i at udforske emnet. Det viste sig at være en større opgave end først antaget, så for at genopfriske teorien er afsnittet, der starter side 17, mit forsøg på at rekapitulere det essentielle fra magnetismen ved at introducere Amperes og Biot & Savarts love med en række eksempler som senere benyttes til at løse problemerne. På side 36 introduceres begrebet gensidig induktion, selvinduktionen for en skiveformet spole findes på side 49 og en generel algoritme er under udvikling i samme kapitel. Det materiale, der danner en slags "facitliste" for arbejdet gennemgås side 54.

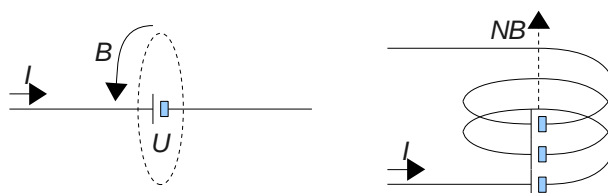
Du er meget velkommen til at kontakte mig på mail@torean.dk hvis du har nogle spørgsmål, hvis du har kommentarer til indholdet eller hvis du finder fejl i artiklen. Alle henvendelser er velkomne.

Artiklen er skrevet under *Ubuntu* med *Open Office* version 3.1 og ved brug af *Writer* og *Calc*. Analyserne er foretaget med *MATLAB*, hvis kode i et vist omfang kan læses af *Octavia*.

Om selvinduktion

Enhver elektrisk komponent er omgivet af et magnetfelt når der løber en strøm igennem den og magnetfeltet påvirker funktionen af komponenten. Det er ganske uanset om det er en ledning, en modstand, en kondensator, en diode eller kobberbanen på et printkort. Påvirkningen viser sig som en spænding i serie med det spændingsfald der ellers måtte være over komponenten. En påført virkning kaldes for induceret og heraf navnet på begrebet: *Induktion*.

Spændingsfaldet over en ledning er derfor ikke alene givet af den strøm der løber igennem dens modstand (og som er givet ved Ohms lov), men er også givet af det omgivende magnetfelt. Mere præcist er det hastigheden som magnetfeltet varierer med, der giver et spændingsfald over ledningen, så spændingens værdi er proportionel med hvor hurtigt magnetfeltet ændres. Derfor ses effekten mest ved meget høje frekvenser, hvor magnetfeltet varierer hurtigt, eller ved abrupte ændringer i strømmen, som ved kontakter der omskiftes; for eksempel i logiske kredsløb og switch-mode strømforsyninger.



Figur 4 – Strømmen I giver anledning til magnetfeltet med styrken B omkring lederen og en ændring i magnetfeltet giver et spændingsfald U der ligger i serie med lederen og som er givet ved hastigheden magnetfeltet ændres med (vist som symbolet på et batteri).

Vikles ledningen op i N løkker vil hver løkke generere et magnetfelt på B , idet strømmen er den samme i alle løkker, og det samlede magnetfelt gennem spolen bliver NB . En ændringen i magnetfeltet på ΔB indenfor et vist tidsrum giver anledning til en spændingsændring på ΔU i hver af spolens løkker. Den samlede ændring i magnetfeltet er $N\Delta B$ så spændingsændringen bliver $N\Delta U$ i hver af løkkerne, og da der er N løkker i spolen bliver virkningen for alle løkker tilsammen på $N^2\Delta U$. Det illustrerer hvorfor det er så effektivt at vikle tråden op til en spole, og da det er tråden selv der inducerer spændingen kaldes det: *Selvinduktion*.

For at denne beskrivelse skal være korrekt er det nødvendigt at magnetfeltet fra hver løkke løber igennem samtlige løkker. I praksis vil noget af magnetfeltet ikke nå frem til alle løkker på grund af feltets spredning, så den samlede virkning er mindre end N^2 gange induktionen af den enkelte løkke. Det vises i formlerne ved matematiske udtryk, der korrigerer talværdien som funktion af længden og diameteren samt eventuelt beviklingens tykkelse og trådtykkelsen.

Alle formler for beregning af selvinduktion indeholder den magnetiske konstant $\mu_0 = 1,26 \mu\text{H/m}$, som med sin enhed antyder at formlen skal indeholde en karakteristisk længde for spolen, og det er oplagt at anvende dens diameter til udtrykket $L = \mu_0 d$, der i praksis kommer ganske tæt på det korrekte. Dertil kommer kvadratet på antallet af vindinger og den omtalte spredning i feltet, som resulterer i en korrektionsfaktor K , der afhænger af spolens geometri. Den generelle formel for selvinduktion af en spole med N vindinger og diameter d er derfor:

$$L = \mu_0 d N^2 K$$

Det er artiklens målsætning at angive brugbare udtryk for korrektionsfaktoren K , og da spolens geometri er en afgørende faktor, er det ikke muligt bare at angive en konstant værdi. Det undrer næppe nogen, at en spole med få og tætsiddende vindinger giver en højere værdi af K , end en lang spole med mange vindinger hvor koblingen mellem de fjerneste vindinger er ringe. Værdien er da også omkring 2,5 for den simple spole med en enkelt vinding, og falder til cirka 0,5 for en cylindrspole med mange vindinger.

Alle spoler vikles med en tråd af en vis tykkelse, og tråden selv bidrager med en selvinduktion fra feltet inde i lederen. Ved lave frekvenser er strømmen jævnt fordelt over lederens tværsnit, og feltstyrken vokser fra nul i centrum af lederen til en maksimalværdi ved overfladen, og dette felt giver en selvinduktion, som her kaldes L_1 med en typisk værdi omkring de 50 nH per meter tråd. Ved højere frekvenser fortrænges strømmen fra det indre af lederen og løber fortrinsvis i et tyndt bånd i overfladen af tråden, så værdien af L_1 aftager med stigende frekvens. Da strømmen nu er koncentreret i et mindre tværsnit vil DC modstanden stige. Det kaldes for *strømfortrængning* og omtales i afsnittet om spolens elektriske model (side 14).

Tilslutningen til spolen danner en lukket sløjfe, som afgrænser et areal, og det magnetiske felt i arealet giver anledning til en selvinduktion, der her kaldes L_2 og ligeledes optræder som en del af spolens selvinduktion. Værdien er givet af trådens tykkelse og afstanden mellem lederene, og er med cirka 1 μH per meter af ganske stor betydning for især mindre spoler. I eksemplet på næste side udgør selvinduktionen i tilslutningen omkring 10 % af den totale selvinduktion.

Den resulterende selvinduktion består derfor af tre led, ét for lederen selv, ét for tilslutningen til spolen, det vil sige hele det eksterne kredsløb, og endelig ét for spolen selv. Det betyder at alle formler i denne artikel skal benyttes som følger, hvor K fremgår af de matematiske udtryk, og som er funktion af trådens tykkelse, spolens diameter og længde, samt tykkelsen af beviklingen.

$$L = L_1 + L_2 + \mu_0 d N^2 K$$

En simpel spole med lederen bukket til cirkelform har en selvinduktion, der alene bestemmes af diameteren og trådens tykkelse ved formlen L_{K0} på første side. Det er en tilnærmelse at tillade spolen at indeholde flere vindinger end én, men resultatet af at gøre det er godt, hvis antallet af vindinger er lille og vindingerne ligger tæt sammen. Af samme grund er formlen begrænset til ni vindinger (tre vindinger i tre lag). De øvrige formler er enten simplifikationer af det korrekte udtryk, eller de er udviklet af kreative personer, der havde brug for en god formel. Et godt eksempel på det sidste er den velkendte *Wheeler's formel* (L_w), der holder $\pm 0,33\%$ hvis den benyttes korrekt, men som kan give groft forkert resultat hvis den bruges uden omtanke.

Alle formler er ledsaget af en begrænsning på deres anvendelsesområde, men der kan stadig opstå overraskelser. Som et eksempel er formlerne L_{K1} og L_{K2} begge udviklet fra en matematisk model, hvor spolen er repræsenteret af en uendelig tynd folie med angivet diameter og længde, og hvori den elektriske strøm flyder jævnt. Ved en meget kort spole vil det matematiske udtryk kunne forventes at ligne L_{K0} , men sidstnævnte benytter en tråd med en vis tykkelse, hvorimod modellens tråd er en folie uden tykkelse og den beregnede selvinduktion bliver derfor højere. Det gør det svært at omsætte modellen til en fysisk realiserbar spole, men som eksemplerne viser, går det nu ganske godt i praksis, blot diameteren er væsentligt større end trådens diameter.

Eksempler

Tre spoler skal beregnes for at vise formlernes brug: en meget kort spole, en kort cylinderspole og en lang cylinderspole. Konklusionen er at formlerne er brugbare, men der kan forekomme overraskelser, så man skal ikke stole på at resultatet er væsentligt bedre end $\pm 10\%$.

Skiveformet spole

Spolen har $N = 4$ vindinger og er viklet på en træform med diameteren $d_1 = 0,178$ m. Trådens tykkelse er $t = 0,5$ mm og isolationen er 0,5 mm tyk så diameteren bliver $d = d_1 + 1,5$ mm = 0,180 m. Længden af spolen er vurderet til $l = 5$ mm som tre gange afstanden center-til-center mellem lederene (3 gange 1,5 mm) plus trådtykkelsen. Længden af tilledningen er på $l_1 = 1$ m. Spolen er målt på en målebros til 7,9 μH ved 10 kHz, men den relativt store spole er følsom for metaldele i sin nærhed så målingen kan ikke ventes at være præcis.



Figur 5 – Skiveformet spole viklet med isoleret tråd på en cirkulær træform.

L_1 – Induktionen af selve tråden beregnes fra den totale længde af tråd l_1 der består af spolens trådlængde $\pi N d$ plus tilledningen til $l_1 = \pi N d + 2l_2 = \pi \cdot 4 \cdot 0,180 + 2 \cdot 1 = 4,26$ m.

$$L_1 \leq (50 \text{ nH/m}) \cdot l_1 \Rightarrow L_1 \leq (50 \text{ nH/m}) \cdot 4,26 \text{ m} = 0,21 \mu\text{H}$$

L_2 – Induktionen af tilslutningens løkke er givet af ledningens længde på $l_1 = 1$ m, afstanden mellem trådene som vurderes til $l_2 = 2$ mm og tykkelsen af tråden på $t = 0,5$ mm.

$$L_2 = \frac{\mu_0 l_1}{\pi} \ln\left(\frac{2l_2}{t}\right) \Rightarrow L_2 = \frac{4\pi 10^{-7} \cdot 1}{\pi} \ln\left(\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 10^{-3}}\right) = 0,83 \mu\text{H}$$

Den samlede induktion fra tråden er $L_1 + L_2 = 1,04 \mu\text{H}$ (13 % af spolens værdi).

L_{K0} – Selvinduktionen beregnes af udtrykket for en simpel spole idet længden af spolen er lille. Præcisionen ved målingen er ikke kendt, men resultatet er godt. Hvis den tilsvarende beregning gennemføres med L_{K1} vil resultatet blive 11 % for højt, hvilket kunne indikere en nedre grænse for L_{K1} og L_{K2} ved en spolelængde mindre end 1/30 af spolens diameter.

$$L = L_1 + L_2 + L_{K0} \Rightarrow L = 1,04 \mu\text{H} + \frac{\mu_0 N^2 d}{2} \ln\left(\frac{1,07 d}{t}\right) \Rightarrow$$

$$L = 1,04 \mu\text{H} + \frac{4\pi 10^{-7} \cdot 4^2 \cdot 0,180}{2} \ln\left(\frac{1,07 \cdot 0,180}{5 \cdot 10^{-3}}\right) = 7,65 \mu\text{H} \quad (-3,2 \%)$$

L_N – Spolen er alt for kort til formlen for Normal spole ($l/d \approx 0,03$), men resultatet er rimeligt.

$$L = 1,04 \mu\text{H} + \frac{\pi}{4} \frac{4\pi 10^{-7} \cdot 0,18^2 \cdot 4^2}{5 \cdot 10^{-3} + 0,42 \cdot 0,18} = 7,39 \mu\text{H} \quad (-6,5 \%)$$

Kort cylinderspole

Spolen har $N = 25$ vindinger og længden $l = 12,5$ mm. Vindingerne ligger tæt så stigningen er lig med tråddykkelsen ($p = t$) og med $l = Nt$ findes tråddykkelsen $t = l/N = 0,5$ mm. Den indre diameter er $d_1 = 32$ mm så spolens diameter bliver $d = d_1 + t = 32,5$ mm. Leverandøren har oplyset selvinduktion for to spoler til henholdsvis $L_A = 24,2$ μH og $L_B = 24,5$ μH , hvilket giver et gennemsnit af selvinduktion på $L = 24,35$ μH med en spredning på $\pm 0,15$ μH svarende til $\pm 0,6$ %.



Figur 6 – Kort cylinderspole fra Coil Craft med opgivet selvinduktion på 24,35 μH .

L_1 – Induktionen af selve trådens beregnes fra den totale længde af tråd l_1 der for spolens del er πNd og for tilledningen 0,2 m giver værdien $l_1 = \pi \cdot 25 \cdot 32,5 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 0,2 = 2,95$ m.

$$L_1 = (50 \text{ nH/m}) \cdot 2,95 \text{ m} = 0,15 \mu\text{H}$$

L_2 – Induktionen af tilslutningen er givet af ledningens længde på $l_2 = 200$ mm og tykkelsen af tråden på $t = 0,5$ mm så kun bredden af løkken må gættes i mangel af data fra producenten. Med en antaget afstand mellem trådene på $l_2 = 5$ mm giver det en induktion på $L_2 = 0,24$ μH .

$$L_2 = \frac{4 \pi 10^{-7} \cdot 0,2}{\pi} \ln\left(\frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 10^{-3}}\right) = 0,24 \mu\text{H}$$

Den samlede induktion fra ledningen er $L_1 + L_2 = 0,39$ μH (1,6 % af spolens værdi).

L_{K1} – Selvinduktion for kort spole L_{K1} kan strengt taget ikke benyttes idet $l/d = 0,38$ ikke er mindre end den øvre grænse (0,35), men resultatet bliver dog ganske pænt alligevel.

$$L_{K1} = 0,39 \mu\text{H} + \frac{4 \pi 10^{-7} \cdot 25^2 \cdot 32,5 \cdot 10^{-3}}{2} \ln\left(\frac{2,43 \cdot 32,5 \cdot 10^{-3}}{12,5 \cdot 10^{-3}}\right) = 23,9 \mu\text{H} \quad (-1,8 \%)$$

L_{K2} – Inkluderes korrektionsfaktoren reduceres fejlen til cirka 1 %.

$$L_{K2} = 0,39 \mu\text{H} + \left(1 + 0,2 \cdot \left(\frac{12,5 \cdot 10^{-3}}{32,5 \cdot 10^{-3}}\right)^2\right) \frac{4 \pi 10^{-7} \cdot 25^2 \cdot 32,5 \cdot 10^{-3}}{2} \ln\left(\frac{2,43 \cdot 32,5 \cdot 10^{-3}}{12,5 \cdot 10^{-3}}\right)$$

$$L_{K2} = 24,6 \mu\text{H} \quad (+1,1 \%)$$

L_w – Selvinduktion efter Wheeler kan kun akkurat benyttes idet $l/d = 0,38$ er meget tæt på 0,40. Resultatet er indenfor måleusikkerheden givet ved de oplyste værdier ($\pm 0,6$ %) og bekræfter den mulige præcision ved Wheelers formel. Med formelen for en Normal spole findes $L_N = 24,9$ μH , der er 2,3 % over den målte værdi, og alle analyserede formler er dermed indenfor grænserne.

$$L_w = 0,39 \mu\text{H} + \frac{\pi}{4} \frac{4 \pi \cdot 10^{-7} \cdot 25^2 \cdot (32,5 \cdot 10^{-3})^2}{12,5 \cdot 10^{-3} + 0,45 \cdot 32,5 \cdot 10^{-3}} = 24,4 \mu\text{H} \quad (+0,25 \%)$$

Lang cylinderspole

Spolen består af to sektioner med $N_A = 50$ og $N_B = 150$, viklet på en 10 mm form (ikke vist) med diameteren $d = 10$ mm. Tråddykkelsen er $t = 0,32$ mm (AWG28) og tykkelsen af papiret er 0,3 mm så spolens diameter bliver $d = 10 + 0,32 + 2 \cdot 0,3 = 10,9$ mm. Den lille sektion er viklet ret tæt så længden bliver $l_A = N_A t = 16$ mm, mens den store er viklet løsere med $l_B = 50$ mm målt på spolen og der er 2 mm afstand mellem sektionerne så totallængden bliver $l_{AB} = 68$ mm. Spolernes selvinduktion er målt med målebrot til $L_A = 17 \mu\text{H}$ for den lille spole, $L_B = 48 \mu\text{H}$ for den store spole og $L_{AB} = 65 \mu\text{H}$ for begge spoler i serie.



Figur 7 – Lang cylinderspole med målt selvinduktion på $65 \mu\text{H}$ for begge spolens sektioner.

L_1 – Induktionen af selve trådens beregnes fra den totale længde af tråd som $l_1 = \pi N d + 0,2$ m så $l_{1A} = 1,7$ m, $l_{1B} = 5,1$ m og $l_{1AB} = 6,8$ m og det giver trådens induktion til $L_{1A} = 0,085 \mu\text{H}$ for den korte spole, $L_{1B} = 0,225 \mu\text{H}$ for den lange og $L_{1AB} = 0,340 \mu\text{H}$ for begge spoler i serie.

$$L_1 = (50 \text{ nH/m}) \cdot l_1$$

L_2 – Induktionen af tilslutningen beregnes af tilledningens længde på $l_2 = 200$ mm, afstanden mellem trådene på $l_3 = 5$ mm og tråddykkelsen på $t = 0,35$ mm.

$$L_2 = \frac{4 \pi 10^{-7} \cdot 0,2}{\pi} \ln\left(\frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{0,35 \cdot 10^{-3}}\right) = 0,27 \mu\text{H}$$

Den samlede induktion af tråden bliver $L_1 + L_2 = 0,36 \mu\text{H}$ for den korte spole (A), $0,50 \mu\text{H}$ for den lange spole (B) og $0,62 \mu\text{H}$ for begge spoler i serie (AB).

L_{K2} – Formlen for kort spole kan ikke benyttes idet $l/d \geq 1,76$ ikke er under 1.

L_W – Selvinduktionen med Wheelers formel kan benyttes da kravet $l/d \geq 0,4$ er opfyldt.

$$L_{WA} = 0,36 \mu\text{H} + \frac{\pi}{4} \frac{4 \pi 10^{-7} \cdot 50^2 \cdot (10,9 \cdot 10^{-3})^2}{16 \cdot 10^{-3} + 0,45 \cdot 10,9 \cdot 10^{-3}} = 14,4 \mu\text{H} \quad (-15 \%)$$

$$L_{WB} = 0,50 \mu\text{H} + \frac{\pi}{4} \frac{4 \pi 10^{-7} \cdot 150^2 \cdot (10,9 \cdot 10^{-3})^2}{50 \cdot 10^{-3} + 0,45 \cdot 10,9 \cdot 10^{-3}} = 49,6 \mu\text{H} \quad (+1,2 \%)$$

$$L_{WAB} = 0,62 \mu\text{H} + \frac{\pi}{4} \frac{4 \pi 10^{-7} \cdot 200^2 \cdot (10,9 \cdot 10^{-3})^2}{68 \cdot 10^{-3} + 0,45 \cdot 10,9 \cdot 10^{-3}} = 65,0 \mu\text{H} \quad (0,0 \%)$$

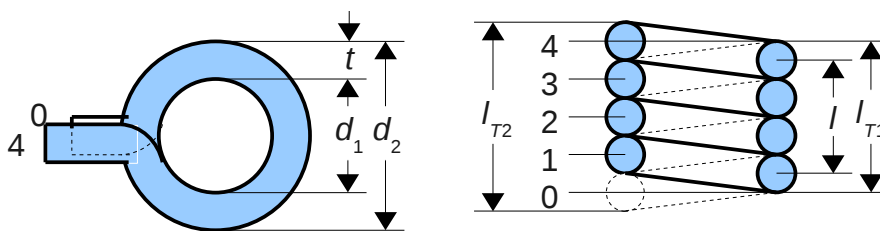
Der er, som det ses, en ganske stor fejl ved den korte spole hvorimod de to lange sektioner rammer godt. Der er ikke nogen kendt forklaring på den observation. I afsnittet om lange spoler er selvinduktionen per vinding beregnet til 366 nH/vinding, hvor de målte værdier giver 340, 320 og 325 nH/vinding og det tyder ikke på målefejl.

Spolens parametre

Spolen er ideelt set en ét-lags spole med viklingerne liggende tæt som en skrue og diameteren er gennemsnitsværdien af spolens indre og ydre diameter (d_1 og d_2), som også kan beregnes ud fra diameteren af den form spolen vikles på og trådens tykkelse (d_1 og t).

$$d = \frac{d_2 + d_1}{2} = d_1 + t$$

Vindingerne ligger ikke som koncentriske cirkler, men beskriver en spiral med en stigning, som er givet ved trådtykkelsen t hvis vindingerne ligger tæt, eller med center-center afstanden mellem vindingerne p (*pitch*) hvis der er luft mellem vindingerne ($p > t$).



Figur 8 – Spolens længde forudsætter at antallet af vindinger er et heltal så trådenderne kommer ud i samme side, men af hensyn til tegningens tydelighed er de vist lidt forskudt.

En enkelt vinding stiger med afstanden p regnet fra centrum af vindingens start til centrum af vindingens slutning når den stiger som gevindet på en skrue. Længden af spolen l er derved et fast bånd med N vindinger der skruer sig igennem spolens længde. Første vinding stiger fra 0 til p for én omdrejning og sidste vinding stiger fra $(N - 1)p$ til Np . Spolens længde bliver derfor:

$$l = Np, \quad p > t \quad \text{eller} \quad l = Nt, \quad p = t$$

Litteraturen er lidt divergerende med hensyn til hvordan længde af spolen l angives. Jeg er af den opfattelse at spolens længde skal måles som anført i tegningen ovenfor, hvorved den totale længde l_{T1} , der kan måles med en skydelærer direkte på spolen, bliver:

$$l_{T1} = l + t = Np + t, \quad p > t \quad \text{eller} \quad l_{T1} = (N + 1)t, \quad p = t$$

Andre opfattelser er at spolens længde måles fra centrum af første leder til centrum af sidste leder, det er fra "0" til "4" i tegningen, hvilket giver den totale længde til $l_{T2} = Np + 2t$ eller $l_{T2} = (N + 2)t$. Den teoretiske model (se side 54) er en cylinder af tynd folie så begyndelsen og enden af røret er klart defineret, og en model med skrueformet bevikling er derfor altid en tilnærmelse.

Nøjagtighed

Wheelers formel skal være god indenfor $\pm 0,33\%$ hvis længden af spolen er større end radius, men det er under en forudsætning, som ikke kan nås i den virkelige verden. Som nævnt ovenfor benyttes et rør af en uendelig tynd folie for at udlede formelmaterialet, og det kan ikke bruges til ret meget når man står med en tråd med en given tykkelse. Den røde kurve i figuren er korrekt, men det er ud fra en ideel betragtning, som ikke kan overføres direkte til den reelle verden.

Når beviklingen af spolen får tykkelse må man benytte ingeniørmæssige antagelser, som for eksempel at holde beviklingen meget lille i forhold til spolens længde eller diameter. Det giver dog blot et nyt problem; for hvornår er *meget lille*, lille nok? Dertil kommer hvor præcist man kan måle spolens dimensioner. Selv med stor påpasselighed er der en usikkerhed på $\pm 1/20$ mm ved brug af en god skydelærer, så en spole med en længde på 10 mm har allerede her en usikkerhed af den ene parameter (længden) på $\pm 0,5\%$ og det påvirker præcisionen af beregningen.

Et bud på effekten heraf kan findes som vist herunder, hvor sensitiviteten s_x angiver den relative ændring (procentvise ændring) i selvinduktionen som følge af en relativ ændring i parameteren X . En ændring betegnes med ΔX og med en skydelære som eneste kilde til fejl er $\Delta x = \pm 0,05$ mm. En relativ ændring er $\Delta X/X$, så man sætter usikkerheden i relation til det, der måles på.

En måde at bestemme værdien af ΔX på, er at foretage den samme måling flere gange med lidt forskellig tilgang og omhyggeligt notere hvert eneste resultat ned. Efter mindst 10 målinger bestemmes ΔX som den største afvigelse i måledata; det vil sige at $\Delta X = X_{MAX} - X_{MIN}$.

Sensitiviteten forstås som følger: For $s_x = 2$ vil en målefejl på 1 % ændre på værdien (selvinduktionen) med 2 %, og for $s_x = -1$ vil en målefejl på 1 % ændre værdien -1 %. For en samlet vurdering af effekten af flere forskellige fejlkilder benyttes kun positive tal (de lodrette streger).

$$\epsilon = \left| s_N \frac{\Delta N}{N} \right| + \left| s_d \frac{\Delta d}{d} \right| + \left| s_l \frac{\Delta l}{l} \right|$$

Værdier for sensitiviteten er vist nedenfor og beregningen er vist i et senere kapitel. For andre forhold mellem længde og diameter end de viste må man gætte sig til en mellemværdi.

Formel	Vindingstal, N	Diameter, d	Længde, l
Wheeler ($l = 0,2d$)	2	2	-0,3
Wheeler ($l = 0,5d$)	2	1,3	-0,5
Wheeler ($l = d$)	2	1,5	-0,7
Kort spole ($l = 0,1d$)	2	1,3	-0,3
Kort spole ($l = 0,2d$)	2	1,4	-0,4
Kort spole ($l = 0,5d$)	2	1,6	-0,6

For den korte spole side 10 er antallet vindinger $N = 25$ og det bør kunne bestemmes præcist, så $\Delta N = 0$. Diameteren er vanskelig at måle fordi spolen fjedrer, så et gæt er $\Delta d = \pm 0,5$ mm. Spolen er stabil i længderetningen så $\Delta l = \pm 0,1$ mm antages. Forholdet mellem længde og diameter er på 0,38 så gennemsnittet mellem 0,2 og 0,5 benyttes og for Wheelers formel bliver usikkerheden:

$$\epsilon = 2 \frac{0}{25} + 1,65 \frac{0,5}{32,5} + 0,4 \frac{0,1}{12} = 0,029 \approx 2,9\%$$

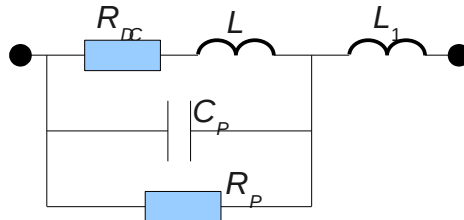
I eksemplet er der en forventet måleusikkerhed på $\pm 2,9$ % hvortil kommer usikkerheden fra selve formlen ($\pm 0,33$ %), om man fik husket at inkludere induktionen fra ledningen (L_1 og L_2) for ellers mangler der cirka 1,6 %, og dertil om man huskede at trække tråddykkelsen fra målingen af diameteren, for ellers har man målt 1,5 % for meget (fejlen bliver 1,65 gange større: 2,5 %). Det er bedre at antage realistiske fejlstørrelser for ikke at bilde sig selv noget ind. Estimatets værdi er afhængig af hvor godt man rent faktisk måler og man bør ikke overvurdere egne evner. Dertil kommer selve målingen af selvinduktionen, som danner referencen for artiklens sammenligning med beregningen. Data er her oplyst af producenten for to *engineering samples*. De er målt på en målebro, men som teksten viser er der en vis usikkerhed allerede i fabrikantens data ($\pm 0,6$ %). Man kan diskutere om de skal med i vurderingen af fejlen i beregningen af selvinduktionen, men det danner reference for vurdering om hvorvidt resultatet er korrekt. Samles alle data uden at skele til det retfærdige i at gøre sådan, bliver et pessimistisk estimat (ϵ_{TOT}) på cirka $\pm 7,5$ % og som kommentaren antyder skal man ikke forvente ret meget bedre.

$$\epsilon_{TOT} = \pm(2,9 + 0,33 + 1,6 + 2,5 + 0,6) = \pm 7,5\%$$

Selv om beregningerne i det tidligere afsnit i mange tilfælde er meget tæt på målingerne, så var der to tilfælde, som faldt 10 til 15 % fra det forventede. Det kan være målefejl eller data kan være ført forkert ind i loggen, men det viser lidt om de overraskelser der kan forekomme.

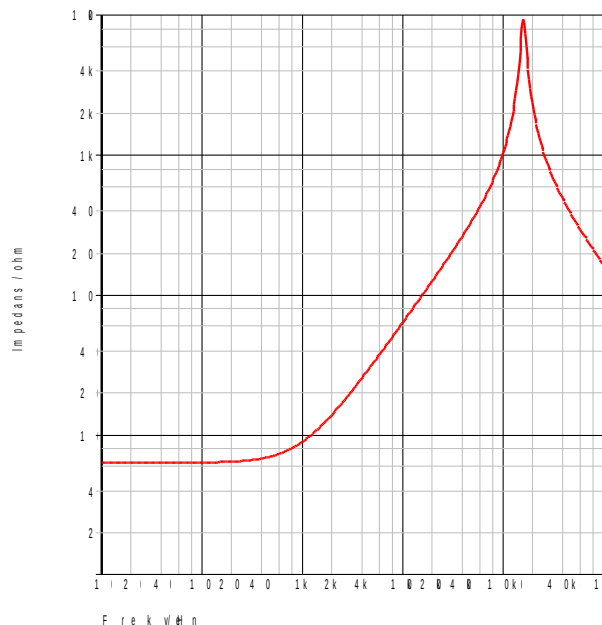
Elektrisk model

Spolen er ikke en ideel komponent, som blot er induktiv; faktisk er det den mindst perfekte af de passive komponenter. Spolen indeholder både en DC modstand R_{DC} og en induktion L_1 på grund af den tråd spolen vikles af, så en simpel model af spolen bliver selvinduktionen L , beregnet som vist på første side, i serie med R_{DC} og L_1 . Modellen nedenfor inkluderer desuden en kapacitet C_P , som begrænser anvendelsen ved høje frekvenser og en modstand R_P , som repræsenterer tab i spolen, for eksempel energi der tabes ved magnetisk kobling til omgivelserne.



Figur 9 – Model af spolen. DC modstanden begrænser impedansen nedadtil og den parallelle kondensator giver resonans ved en høj frekvens hvorover spolen ikke er induktiv.

Spolens impedans er vist nedenfor og eksemplets parametre kunne stamme fra svingspolen i en almindelig højttaler. Med de valgte parametre er spolen induktiv fra cirka 1 kHz og op til resonansen ved 160 kHz over hvilken spolen ikke længere er induktiv (den er faktisk en kondensator).



Figur 10 – Impedansen som funktion af frekvensen for en spole med $R_{DC} = 6,28 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$, $C_P = 1 \text{ nF}$ og $R_P = 10 \text{ k}\Omega$. Grænsefrekvenserne er $f_0 = 1 \text{ kHz}$ og $f_P = 160 \text{ kHz}$.

Kurven er tegnet med SPICE simulatoren SIMetrix fra www.simetrix.co.uk som kan downloades gratis. Den er i gratisudgaven begrænset ved antallet af knudepunkter.

Et mål for spolens kvalitet (engelsk: *quality*) udtrykkes ved dens Q-faktor, der er forholdet mellem den maksimale værdi af spolens impedans og DC modstanden af tråden. Den maksimale værdi opnås ved den frekvens f_0 hvor spolen sammen med en kapacitet går i resonans.

$$Q = \frac{Z_{MAX}}{R_{DC}}$$

Med spolen fra eksemplet er $Z_{MAX} = 10 \text{ k}\Omega$ ved $f_0 = 160 \text{ kHz}$ og med $R_{DC} = 6,28 \Omega$ er spolens godhed på $Q = 1600$.

Ved lave frekvenser dominerer den elektriske modstand i den tråd spolen er beviklet med og bliver den eneste bestemmende faktor for spolens impedans. Den er givet ved materialet (ρ_{Cu}), længden (l_1) og arealet (A_1), og kan bestemmes ved følgende formel, hvor materialekonstanten gælder ved stuetemperatur.

$$R_{DC} = \rho_{Cu} \frac{l_1}{A_1} = \rho_{Cu} \frac{4l_1}{\pi d_1^2}, \quad \rho_{Cu} = 0,0175 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ m}$$

For en trådlængde på $l_1 = 1$ m og tråddykkelsen på $t = 0,25$ mm bliver modstanden $R_{DC} = 0,36 \Omega$. For aluminium er værdien $\rho_{Al} = 0,0282 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ m}$. For jern er værdien cirka $\rho_{Fe} = 0,1 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ m}$ og er afhængig af bearbejdningen af materialet. For kulstof er værdien $\rho_C = 35 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ m}$. Data for andre materialer må værdien findes på internettet: prøv fx Wikipedia med "Specifik modstand".

Trådens længde er givet ved antallet af vindinger gange omkredsen af spolen til $l_1 = N\pi d$ for korte spoler hvor man kan se bort fra at tråden også skal bevæge sig frem og tilbage gennem spolen. Kan man ikke se bort fra længden må værdien forøges med spolens længde gange med det antal lag beviklingen benytter. Trådens areal er givet ved tråddykkelsen til $A_1 = \pi t^2/4$, og hvis den specifikke modstand for kobber indsættes kan formelen simplificeres. Formlen nedenfor til højre gælder for kobbertråd ved 20°C og med diameteren i meter og tråddykkelsen i millimeter.

$$R_{DC} = \rho_{Cu} \frac{N \pi d}{\pi t^2/4} = \rho_{Cu} \frac{4 N d}{t^2} \Rightarrow R_{DC} \approx 0,070 \frac{N d}{t^2} \quad (d \text{ i m og } t \text{ i mm})$$

For en spole med $N = 25$ vindinger, diameteren $d = 32$ mm og tråddykkelsen $t = 0,5$ mm er DC modstanden $R_{DC} \approx 0,2 \Omega$. Det repræsenterer data for spolen på side 10.

Den angivne værdi forudsætter at strømmen løber i hele trådens gennemsnit.

Ved høje frekvenser fortrænges strømmen så den fortrinsvist løber i overfladen af lederen. Feltet inde i lederen formindskes og den interne induktion aftager mens modstanden stiger. Tykkelsen af det lag hovedparten af strømmen løber i kaldes δ og er givet ved trådens ledningsevne ρ , frekvensen f og den magnetiske konstant μ_0 som vist nedenfor (engelsk Wikipedia: "Skin effect"). Hvis lederen er af magnetisk materiale skal μ_0 erstattes af $\mu_R \mu_0$. Strømfortrængningen angiver den afstand fra overfladen og ind i lederen hvori 63 % af strømmen løber, så man kan med en vis ret antage at strømmen løber i en cylinderskal med den angivne tykkelse. Eksemplet er for kobber.

$$\delta = \sqrt{\frac{\rho}{\pi \mu_0 f}} = \sqrt{\frac{0,0175 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ m}}{\pi (4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}) f}} \Rightarrow \delta \approx 67 \text{ mm} \sqrt{\frac{\text{Hz}}{f}}$$

Allerede ved 50 Hz er strømmen begrænset til at løbe i de yderste 10 mm, og er forklaringen på at kabler i højspændingsmasterne ikke er over 2 cm diameter – tykkere kabler ville ganske enkelt være spild af materiale og i praksis består højspændingskabler da også af en kappe af aluminium med en stålwire i midten til at give styrke. Hovedparten af strømmen løber i kappen og kun lidt af strømmen løber i stålwiren så den bliver ikke for varm.

Ved 20 kHz er strømmen begrænset til de yderste 0,5 mm, så effekten kan som oftest ignoreres indenfor det hørbare område, hvor diameteren af kabler sjældent er meget over 1 mm. Det er god latin at anvende tykke kabler til eksempelvis højttalere, men strømmen vil aldrig løbe i centrum af kablet ved de højeste frekvenser, som derfor vil opleve en større modstand.

Ved 1 MHz er strømmen koncentreret i et bælte på mindre end 0,1 mm og man kan med god tilnærmelse gå ud fra at strømfortrængningen helt har fjernet strømmen fra det indre af lederen (hvorved $L_1 \approx 0$). Kredsløb til radiotransmission udnytter dette til at de ledere, der har en stor strøm løbende, udføres som hule rør af sølvbelagt kobber med kølevand inden i.

Spolen har en betydelig kapacitet i parallel, som dels skyldes den elektriske nærhed mellem naboviklinger og dels strømmens tidsforsinkelse gennem beviklingen, idet sidstnævnte optræder

som en fasedrejning. Kapaciteten begrænser anvendelsen ved høje frekvenser, men værdien er meget vanskelig at bestemme da den blandt andet afhænger af den måde spolen vikles på og frekvensen der måles ved.

En spole kan vikles i ét lag, hvilket er det bedste for at holde kapaciteten mellem vindingerne nede, eller den kan vikles i adskilte grupper af vindinger hvorved kapaciteterne effektivt set kobles i serie og derved reducerer den effektive værdi. Hvis beviklingen benytter flere lag vil lagene koble og dermed forøge kapaciteten. Det har især betydning for bygning af kredsløb ved højfrekvens. Jeg rendte ind i problemet ved bygning af en AM-radio hvor mellemfrekvensen er i nærheden af 500 kHz, og det var ikke muligt at få kapaciteten lav nok til at kunne få resonans ved den frekvens uden at opdele beviklingen i sektioner.

Modellen på side 12 kan kun benyttes når bølgelængden af signalet er meget større i forhold til længden af den tråd spolen er viklet af. Bølgelængden er "meget større" når den er 100 gange spolens trådlængde – for at få en tommelfingerregel. Signalets hastighed gennem tråden sættes til lysets hastighed c , hvilket er en grov tilnærmelse, men det betyder intet her. En cirkulær spole med diameteren d og med N vindinger har trådlængden $l_1 \approx N\pi d$, så for en "lang" bølgelængde på $\lambda = 100 l_1$ findes den øvre grænsefrekvens af følgende formel.

$$f_{max} \lambda = c \Rightarrow f_{max} = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{100 l_1} = \frac{c}{100 N \pi d}, \quad c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

For en spole med diameteren $d = 0,1$ m og et antal vindinger på $N = 100$ er den estimerede øvre grænse derfor $f_{max} = 100$ kHz. Det er muligt at anvende spolen ved en højere frekvens og det burde i teorien være muligt at anvende spolen indtil trådlængden svarer til en kvart bølgelængde, det svarer til 2,5 MHz, men det er der absolut ingen garanti for at man kan. Den konservative beregning ovenfor er et godt udgangspunkt for et gæt på den grænse man bør holde sig under.

Hermed slutter introduktionen til beregning af en spoles selvinduktion og de begrænsninger der må tages i ed. De følgende kapitler gennemgår det fundamentale teoretiske materiale for den magnetiske teori og det udbygges hen imod en algoritme for beregning af selvinduktionen af en spoles med både diameter, længde og tykkelse af beviklingen.

Spoler kobler til omgivelserne og kan derfor afsætte effekt i eksterne komponenter, for eksempel nærliggende baner på et kredsløbskort. Som det vises i et senere kapitel aftager styrken af det magnetiske felt med tredje potens af afstanden fra spolen, så en måde at mindske tabet er at øge afstanden. Hvis det er to spoler, der påvirker hinanden, er en mulighed at anbringe dem vinkelret på hinanden. Den teknik er mulig med indtil tre spoler (xyz-akserne), men for et højere antal spoler er eneste mulighed at øge afstanden eller at skærme de enkelte spoler.

ELEKTROMAGNETISME

Sammenhængen mellem elektricitet og magnetisme blev opdaget af Romagnosi brødre i 1802, men blev først kendt da Ørsted genopdagede effekten i 1820 og publicerede resultaterne. En række betydende opdagelser følger i kølvandet og Maxwell samler i 1873 den indhøstede viden i elektromagnetismen. Det er første gang i historien at to kræfter samles i én fælles beskrivelse og desuden fastlægges lysets hastighed ved to konstanter ($c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$), så den er konstant for alle iagttagere – hvilket inspirerede Einstein til udviklingen af relativitetsteorien i 1905.

I dette kapitel introduceres det grundlag, der er nødvendigt for at udlede formler for selvinduktion, men inden emnet behandles er det nødvendigt at introducere begrebet *linearitet*, der er en forudsætning for at *superpositionsprincippet* kan anvendes.

Linearitet betyder at der ikke er nogen øvre eller nedre begrænsninger, så når en strøm giver et magnetfelt af en vis størrelse, vil en fordobling af strømmen også fordoble det magnetiske felt, og hvis strømmen reduceres til nul vil magnetfeltet også blive nul. Det krav mødes af alle luftspoler under den forudsætning, at den elektriske strøm ikke varmer tråden op over smeltepunktet. For en spole med metalkerne kan forudsætningen om linearitet dog ikke forudsættes opfyldt idet magnetfeltet i kernen ikke falder til nul når strømmen slukkes (*remanens*) og det magnetiske felt kan ikke vokse over en øvre grænse, der er karakteristisk for materialet og som indtræder ved cirka 0,2 T for ferritkerner (pulverkerner) og cirka 2 T for jernkerner (transformerblik).

Superpositionsprincippet betyder at resultatet af flere påvirkninger kan beregnes ved at addere de enkelte bidrag og det er en direkte konsekvens af linearitet. Det betyder at magnetfeltet i et punkt kan have flere kilder og værdien kan beregnes for hver kilde for sig selv med det samlede resultat givet ved addition af bidragene. Et eksempel er magnetfeltet omkring to tætliggende ledere, der fører den samme strøm; det magnetiske felt udenfor lederne vil være summen af den magnetiske feltstyrke for hver af lederne og i stor afstand vil værdien være to gange feltet fra den ene af lederne. Superpositionsprincippet anvendes både i Amperes lov, der introduceres på side 18, og senere i Biot og Savarts lov på side 26, hvor den magnetiske fluxtæthed i et punkt bestemmes ved at addere bidragene fra korte lederstykker.

Selvinduktion

Enhver leder, der gennemløbes af en strøm I genererer et magnetisk felt, som beskrives ved den magnetiske flux Φ , der løber i rummet omkring lederen og relationen mellem de to er givet ved en karakteristisk konstant for kredsløbet, kaldet *selvinduktionen*, der har symbolet L , sandsynligvis for at hædre Lentz. Produktet $N\Phi$ er flux-vindingstallet, der også betegnes med Φ_v , Φ eller λ og som kaldes den omsluttede flux [1-154] idet det er den flux som de N ledere omslutter.

$$N\Phi = LI$$

Enheden for magnetisk flux er weber (Wb) så enheden for selvinduktionen bliver weber per ampere (Wb/A), der har fået tildelt den afledte SI enhed henry (H).

Selvinduktionen kan udledes direkte af ligningen ved division med strømmen til et udtryk der vil blive brugt flittigt i den følgende analyse. I ligningen er Φ den magnetiske flux der omslutter en enkelt vinding af spolen og for N omsluttede vindinger bliver værdien til flux-vindingstallet $N\Phi$.

$$L = N \frac{\Phi}{I}$$

Opgaven er nu at finde et udtryk for den magnetiske flux gennem spolen som funktion af den elektriske strøm igennem lederen. Men før det kan gøres er det nødvendigt at forstå hvad magnetisk flux er og hvordan den beregnes for et magnetisk kredsløb.

Magnetisk flux

Den magnetiske flux Φ angiver den totale strøm af magnetfeltlinjer gennem et areal A og en betegnelse for hvor kraftig feltet er kaldes *den magnetiske fluxtæthed*, der betegnes med B . De to størrelser, Φ og B , kan virke fremmedartede, men der er en analogi til den mængde lys der falder ind gennem et vindue. Mængden af lys (fluxen Φ) er givet ved lystes intensitet (fluxtætheden B) og vinduets areal (A), så en fordobling af arealet medføre en dobling af fluxen gennem det.

$$\Phi = BA, \quad \text{for } B = \text{konstant}$$

Enheden for magnetisk flux er weber (Wb) så enheden for magnetisk fluxtæthed bliver Wb/m² der har den afledte SI-enhed tesla (T). En anden form er H/A.

Beregningen forudsætter at den magnetiske fluxtæthed er konstant over arealet, hvilket kun sjældent er tilfældet. I analogien til lysindfaldet gennem et vindue kunne der stå et træ foran vinduet, hvorved bladene kaster en varierende skygge på vinduearealet og en fordobling af arealet derfor ikke nødvendigvis medfører en fordobling af den indfaldne lysmængde. Når antagelsen af konstant magnetisk fluxtæthed ikke er gyldig må en omvej benyttes. Den magnetiske flux gennem et lille arealelement dA kan godt beregnes som produktet af en konstant magnetisk fluxtæthed og arealet, idet fluxtætheden kan antages for konstant når arealet er lille nok; derved er $d\Phi = BdA$ for et givet punkt, men B er nu en funktion af hvor på fladen der skal beregnes.

Den samlede magnetiske flux gennem arealet er en sum af alle bidragene $d\Phi$ over hele fladen med arealet A , hvilket i den matematiske notation betegnes ved integration over arealet. Bruges vektorer skal B have samme retning som normalen til arealet, hvilket svarer til en projektion af arealet ind på en flade der står vinkelret på den magnetiske fluxtæthed, og i det er tilfældet er vinklen til normalen nul og cosinus bliver én – og det vil blive forudsat opfyldt i resten af artiklen.

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B dA \cos(\theta) dA \Rightarrow \boxed{\Phi = \int B dA, \quad \theta = 0}$$

Integralet af BdA vil blive brugt flittigt i artiklen til beregning af fluxen igennem spoler.

Amperes lov

Ampere indså i 1820'erne at det magnetiske felt løber cirkulært omkring en lang og lige leder med en styrke givet ved strømmen i lederen og afstanden fra lederen. Amperes lov er en balance mellem to integraler; det ene for den elektriske leder og det andet for det magnetiske felt langs en kurve omkring lederen. I formlen benyttes symbolet J for strømtætheden i lederen hvis tværsnit er S , og den magnetiske fluxtæthed er B langs et linjeelement dl på en lukket kurve, der omslutter lederen eller gruppen af ledere. I ligningen indgår desuden *den magnetiske konstant* μ_0 (tidligere kaldt *permeabiliteten*), som Maxwell indførte da han samlede trådene i elektromagnetismen.

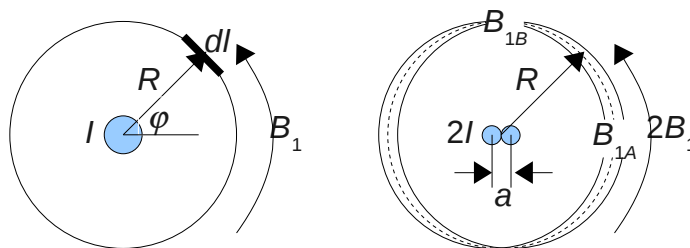
$$\mu_0 \int J dS = \int \vec{B} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \mu_0 I = \int B \cos(\theta) dl, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

Det første integral tillader strømmen at variere over lederens tværsnit S , men hvis strømmen er konstant over hele lederen giver det venstre integral JS , der er lig med den totale strømstyrke I , så venstre side af ligningen bliver $\mu_0 I$. En varierende fordeling af strømmen kan opfattes som det tilladelige i at have to eller flere parallelle ledere, der hver bærer strømmen I og derved adderes bidragene til det resulterende udtryk $\mu_0 NI$, hvor N er antallet af ledere. Det andet integral er udtryk for magnetfeltets styrke langs med et linjeelement dl på kurven. Vektor prik-produktet er en projektion af magnetfeltet ind på linjeelementet (B -feltets styrke i linjeelementets retning), så det er lig med de to vektorers længde ganget med cosinus til vinklen imellem dem.

$$\boxed{\mu_0 N I = \int B \cos(\theta) dl}$$

Enkelt leder

Amperes lov skal først benyttes til at beregne den magnetiske fluxtæthed omkring en lang og lige leder. Lederen er her vinkelret på papiret og strømmens retning er positiv ud mod læseren.



Figur 11 – Det magnetiske felt omkring en enkeltleder (venstre) og to ledere som illustration af superpositionsprincippet (højre).

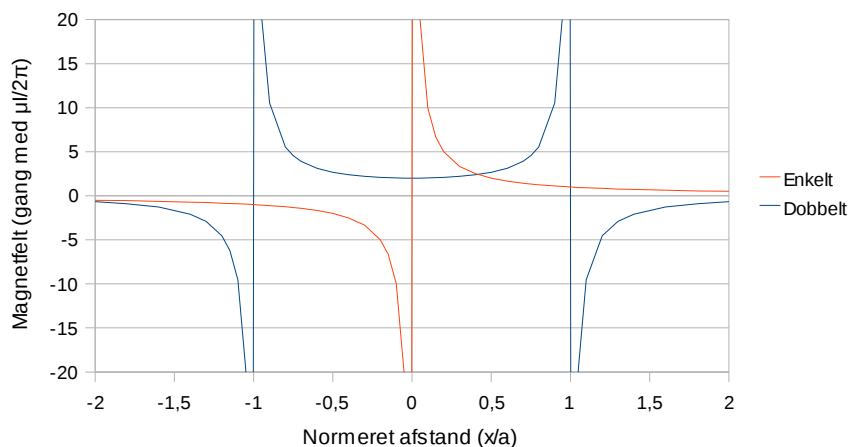
Magnetfeltets retning er vedtægtsmæssigt i positivt omløb om lederen; det vil sige at hvis man griber om lederen med højre hånds tommelfinger i strømmens retning så vil fingrene pege i magnetfeltets retning. Der er ingen fysisk begrundelse for dette valg.

Integrationen vil blive udført langs en lukket kurve med konstant afstand fra lederen; det vil sige på periferien af en cirkel med centrum i lederen. Symmetrien sikrer at den magnetiske fluxtæthed er den samme overalt langs periferien så B_1 er konstant og deltager ikke i integrationen. Feltets retning er orienteret langs med linjeelementet dl , så vinklen mellem dem er $\theta = 0$ og $\cos(\theta) = 1$. Længden af linjeelementet er $dl = R d\varphi$ hvor R er radius og $d\varphi$ er drejningens vinkel. Vinklen rundt langs med periferien løber fra 0 til 2π så integralet af $R d\varphi$ giver $2\pi R$.

$$\mu_0 N I = \int B_1 dl \Rightarrow \mu_0 N I = B_1 2\pi R \Rightarrow \boxed{B_1 = \frac{\mu_0 N I}{2\pi R}}$$

For en strøm på $I = 1$ A bliver den magnetiske fluxtæthed $B_1 = 40 \mu\text{T}$ i afstanden $R = 5$ mm fra en enkeltleder ($N = 1$) hvilket er tæt på jordens magnetiske feltstyrke (cirka $45 \mu\text{T}$ i Danmark).

Kurven for B_1 vises i Figur 12 for en uendelig tynd leder som den røde streg og uden $\mu_0 N I / 2\pi$; det vil sige at det kun er $1/R$ der er vist og at kurvens værdier skal ganges med den angivne faktor. Den magnetiske fluxtæthed går mod uendelig når afstanden fra lederen går mod nul.



Figur 12 – Den magnetiske fluxtæthed (uden faktor $\mu_0 N I / 2\pi$) for en enkeltleder i $x = 0$ (rød) og for en dobbelt ledning (blå) med lederne i afstand $\pm a$ (vist som -1 og 1). Bemærk at feltet mellem to parallelle ledere kun varierer $\pm 1\%$ for $|x| < 0,1a$ og mindre end $\pm 10\%$ for $|x| < 0,3a$.

Tegningen til højre i Figur 11 viser hvordan magnetfeltet opbygges for et system med to ledere i parallel og med samme strømstyrke. I afstanden R fra centrum af lederbundtet må man forvente

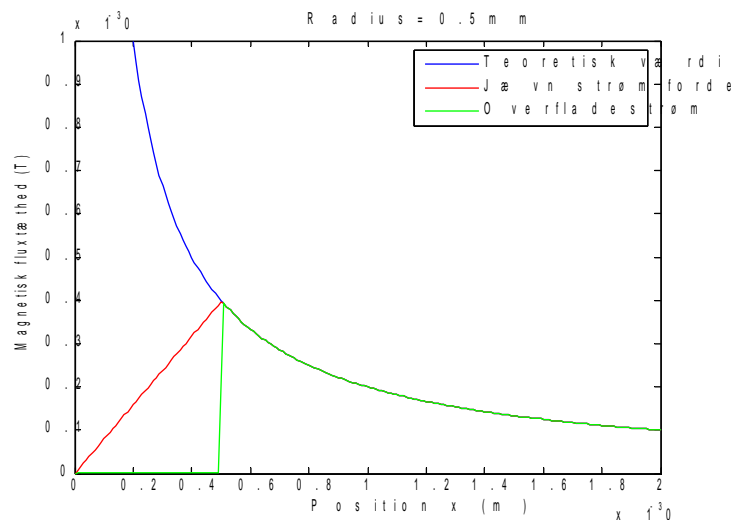
en magnetisk fluxtæthed tæt på det dobbelte af den enkelte leder. Den magnetiske fluxtæthed beregnes nedenfor i de to punkter, som er angivet på tegningen, og som kommentaren viser er antagelsen særdeles god når radius er mindst 10 gange større end afstanden mellem lederne.

$$B_{1A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R-a/2)} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(R+a/2)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{2}{1 - \left(\frac{a}{2R}\right)^2}$$

$$B_{1B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(\sqrt{R^2+a^2/4})} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(\sqrt{R^2+a^2/4})} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{2R}\right)^2}}$$

I en afstand fra lederne på 10 gange afstanden mellem lederne ($a/R = 0,1$) er den magnetiske fluxtæthed 0,25 % større i punkt A end med strømmen $2I$ løbende i centrum mellem lederne, og værdien er $-0,125\%$ i punkt B. Ved 2 gange afstanden mellem lederne er tallene på henholdsvis 6,7 % og -3% så man skal ikke ret langt væk for at kunne bruge en tilnærmet beregning.

Samme beregningsprincip blev benyttet til at beregne den magnetiske fluxtæthed i afstanden x fra centrum af en leder med diameteren 1 mm (radius 0,5 mm), som bærer en strømstyrke på 1 A og hvor beregningen inkluderer det indre af lederen. Den røde kurve giver forløbet ved en jævn fordeling af strømmen over hele lederens tværsnit, og blev beregnet ved at lederen blev repræsenteret ved et stort antal parallelle ledere. Den grønne kurve giver forløbet for en strøm der kun løber i overfladen af lederen, og blev beregnet ved et stort antal ledere langs en cirkulær kurve omkring centrum. Den blå kurve repræsenterer Amperes lov med strømmen løbende i centrum og som det ses er beregningen gyldig fra og med lederens overflade.



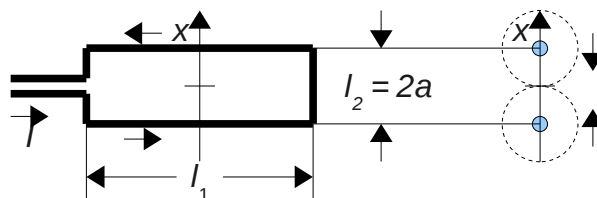
Figur 13 - Den magnetiske fluxtæthed som funktion af afstanden fra centrum af en elektrisk leder med 0.5 mm radius og en strøm på 1 A. Blå kurve viser forløbet efter Amperes lov når strømmen regnes for at løbe i centrum af lederen. Forløbet vises med en jævnt fordelt strøm over lederen (rød) og en strøm der kun løber i overfladen af lederen (grøn).

Feltstyrken ved overfladen af lederen vokser over alle grænser for aftagende tykkelse, men selv om det er korrekt fra et matematisk synspunkt, så er det ikke fysisk realistisk, som det illustreres af kommentaren nedenfor. Afstanden skal være lille for at give en stor fluxtæthed og lederen skal have en vis tykkelse for at kunne bære strømmen – og de to krav strider imod hinanden.

Hvis en strøm på 1 A løber i en leder med tykkelsen $2\ \mu\text{m}$ er den magnetiske fluxtæthed 0,2 T ved overfladen ($1\ \mu\text{m}$ fra centrum). For en kobbertråd vil modstanden være $6\ \Omega$ for en længde på blot en millimeter. Der kræves derfor en spænding på 6 V for at tvinge 1 A igennem lederen, så der afsættes en effekt på 6 W i tråden, som hurtigt vil varmes op og fordampe så strømmen afbrydes.

Dobbelt leder

Hvis den lange leder foldes sammen til en aflang og rektangulær løkke hvor den lange side er meget længere end den korte kan den magnetiske fluxtæthed bestemmes inde i løkken såvel som udenfor ved at betragte systemet som to uendeligt lange og parallelle ledere.



Figur 14 – Den magnetiske fluxtæthed omkring en aflang løkke med et detaljeret snit vist til højre. Inde i spolen vil magnetfelterne understøtte hinanden mens de udenfor modvirker hinanden, så feltet aftager med kvadratet på afstanden i nogen afstand fra lederparrat.

Den indbyrdes afstand mellem lederene er $l_2 = 2a$ og koordinatsystem arrangeres med nulpunkt midt mellem de to ledere så lederne går gennem $x_1 = -a$ og $x_2 = a$. Den magnetiske fluxtæthed opskrives først for hver enkelt leder i et punkt langs x-aksen. De to felter understøtter hinanden i området indenfor spolen hvor begge udtryk giver et positivt resultat, mens de modvirker hinanden udenfor. For $x > a$ er B_{2A} negativt og for $x < -a$ er B_{2B} negativ.

$$B_{2A}(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a-x)} \quad \text{og} \quad B_{2B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a+x)}$$

Den resulterende magnetiske fluxtæthed i det valgte punkt er givet af summen af de to felter, og kurven vises i Figur 12 med blå streg.

$$B_2(x) = B_{2A}(x) + B_{2B}(x) \Rightarrow \boxed{B_2(x) = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{a}{a^2 - x^2}}$$

Ved symmetriaksen mellem lederene ($x = 0$), er den magnetiske fluxtæthed det dobbelte af værdien i afstanden a fra en enkeltleder, og i stor afstand fra løkken ($|x| \gg a$) er den magnetiske fluxtæthed omvendt proportional med kvadratet på afstanden så feltet aftager ganske hurtigt udenfor to parallelle ledere hvor strømmen løber i hver sin retning i lederne. Det resultat kan umiddelbart overføres til almindelige el-kabler og til højspændingskabler i en passende afstand.

$$B_2(0) = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \quad \text{for} \quad |x| \ll a \quad \text{og} \quad B_2(x) \Big|_{|x| \gg a} \rightarrow \frac{-\mu_0 I}{\pi a} \left(\frac{a}{x}\right)^2$$

Den totale magnetiske flux i arealet mellem lederene beregnes ved integration af B_2 over arealet. I det følgende vil t betegne trådens tykkelse (trådens diameter), og integrationen benytter et smalt bånd med bredden dx og længden l_1 (lederparrets længde). Der integreres fra $-a$ til a på nær radius af ledere ($t/2$), så nævneren ikke bliver nul. Det betyder at arealelementet bliver $dA = l_2 dx$ og den magnetiske flux findes af:

$$\Phi = \int B_2(x) dA = \int_{-a+t/2}^{a-t/2} \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{a}{a^2 - x^2} l_1 dx = \frac{\mu_0 I a l_1}{\pi} \int_{-a+t/2}^{a-t/2} \frac{dx}{a^2 - x^2}$$

På grund af symmetrien vil integralet fra $-a + t/2$ til nul give samme som fra nul til $a - t/2$, så det er tilstrækkeligt at foretage sidste integration og gange med to. Integralet løses ved opslag i et tabelværk [4-157, 5-65] og der kræves ombytning af a og x svarende til et fortegnsskift.

$$\Phi = -2 \frac{\mu_0 I a l_1}{\pi} \int_0^{a-t/2} \frac{dx}{x^2 - a^2} = -2 \frac{\mu_0 I a l_1}{\pi} \left[\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \right]_0^{a-t/2}$$

Den nedre grænse fra integrationen er $x = 0$ og giver $\ln(1)$, som er lig nul, så det er kun den øvre grænse på $x = a - t/2$, der giver et bidrag. Faktor $2a$ går ud mod divisor $2a$ og der er brug for den numeriske værdi af argumentet til logaritmen for at fjerne fortegnet til $t/2$ i tælleren.

$$\Phi = \frac{-\mu_0 I a l_1}{\pi a} \ln \left| \frac{a-t/2-a}{a-t/2+a} \right| = \frac{-\mu_0 I l_1}{\pi} \ln \left(\frac{t}{4a-t} \right)$$

Nævneren simplificeres ved at forudsætte at afstanden mellem lederene er meget større end tråddykkelsen ($a \gg t$) hvorved leddet $4a - t$ kan skrives som $4a$. Fortegnet fjernes ved at inverttere argumentet til logaritmen og desuden substitueres $l_2 = 2a$.

$$-\ln \left(\frac{t}{4a} \right) = \ln \left(\frac{4a}{t} \right) \Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 I l_1}{\pi} \ln \left(\frac{2l_2}{t} \right), \quad l_2 \gg t$$

Selvinduktionen beregnes som $L = \Phi/I$ (idet $N = 1$ da der ikke er flere vindinger).

$$L_2 = \frac{\mu_0 l_1}{\pi} \ln \left(\frac{2l_2}{t} \right), \quad l_1 \gg l_2 \gg t$$

Selvinduktionen varierer kun lidt med tråddykkelsen. For $l_2/t = 10$ stiger værdien 23 % ved halvering af tråddykkelsen, og for $l_2/t = 100$ stiger værdien 13 % ved halvering af tråddykkelsen.

Eksempel: Tilslutningstråden til en spole danner selv en spole med en enkelt vinding. At spolen ikke afsluttes med en kortslutning er uden betydning, så længe den samme strømstyrke løber frem og tilbage igennem den. Hvis tilslutningstråden har længden $l_1 = 1$ m for hver af lederene, afstanden mellem trådene er $l_2 = 5$ mm og tråddykkelsen er $t = 1$ mm, så bliver $L_2 = 0,9 \mu\text{H}$.

$$L_2 = \frac{4 \pi 10^{-7} \cdot 1}{\pi} \ln \left(\frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-3}} \right) = 0,9 \cdot 10^{-6} \text{ H}$$

Det samme kabel vil have en DC modstand på $R_{DC} = 0,02 \Omega$ (se side 14). Selvinduktionen giver en impedans på $X_L = 2\pi f L_2$ så DC-modstanden bliver lig med impedansen ($R_{DC} = X_L$) ved en frekvens på $f = R_{DC}/2\pi L_2 = 4$ kHz, så kablet er ikke en ren induktion og for frekvenser under cirka 4 kHz er det DC modstanden, der er den dominerende faktor.

Det er forudsat at $l_1 \gg l_2$, hvilket skyldes ønsket om at kunne benytte Amperes lov for en uendelig lang leder. Hvis det forsøgsvis antages at $l_1 = \pi l_2$ vil arealet imellem lederene blive $l_1 l_2 = \pi l_2^2$ og det er lig med arealet af en cirkel med radius $l_2 = R$. Indsættes udtrykket i formlen ovenfor vil l_1/π blive til R og resultatet er selvinduktionen af en enkelt vinding, der omslutter arealet πR , det vil sige at formlen er et bud på selvinduktionen af enkelt vinding med radius R (eller diameteren d) og dertil tråddykkelsen t .

$$L_2 = \mu_0 R \ln \left(\frac{2R}{t} \right) = \frac{\mu_0 d}{2} \ln \left(\frac{d}{t} \right)$$

Udtrykket er ganske tæt på den formel, der opbygges side 34 og dertil Maxwells formel (side 54). For en diameter på $d = 100$ mm og tråddykkelsen $t = 1$ mm er selvinduktionen $L_2 = 289$ nH, hvor værdien efter Maxwells ligger mindre end 2 % højere på $L_{MHF} = 294$ nH.

Beregningen tager ikke hensyn til den del af feltet, der løber inde i lederen. Som vist i Figur 13 vil feltet ved lave frekvenser stige fra nul til værdien $B_1 = \mu I/\pi t$ ved overfladen af lederen, så der vil være en magnetisk flux i selve lederen. Andelen falder mod nul ved høje frekvenser på grund af strømfortrængningen, men det kan være relevant at medtage den for analyse ved lave frekvenser. Det betyder at integrationen skal gå ind i lederen hvor noget af den magnetiske flux vil løbe den anden vej omkring strømmen, så en del af feltet vil modarbejde sig selv. Rosa [7] har anført

at halvdelen af feltet tabes på denne måde og det antages at holde uden bevis. Feltbidraget kan skrives som en vægtning af B_1 med 0 ved centrum af lederen og lineært stigende til fuld værdi ved overfladen ($x = t/2$), hvilket svarer til vægtning med $2x/t$, og integrationens areal er et smalt bånd på langs med lederen $dA = l_1 dx$. Integralet er let at beregne [4-153, 5-57].

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} \int_0^{t/2} \frac{\mu_0 I}{\pi t} \frac{2x}{t} l_1 dx = \frac{\mu_0 l_1 I}{\pi t^2} \int_0^{t/2} x dx = \frac{\mu_0 l_1 I}{\pi t^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{t/2} = \frac{\mu_0 l_1 I}{8\pi} \Rightarrow L_0 = \frac{\mu_0 l_1}{8\pi}$$

Selvinduktionen af lederen indgår i begge retninger.

$$L_{2DC} = L_2 + 2L_0 = \frac{\mu_0 l_1}{\pi} \ln\left(\frac{2l_2}{t}\right) + 2 \frac{\mu_0 l_1}{8\pi} \Rightarrow L_{2DC} = \frac{\mu_0 l_1}{\pi} \left[\ln\left(\frac{2l_2}{t}\right) + \frac{1}{4} \right]$$

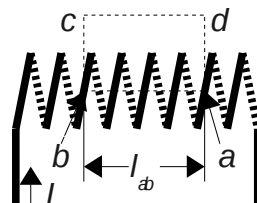
Det er muligt at omskrive udtrykket ved at skrive $\frac{1}{4} = \ln(\exp(\frac{1}{4}))$ og derefter benytte reglen om addition af logaritmer $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. Det bringer $\exp(\frac{1}{4}) = 1,28$ ind i logaritmen som en faktor og resulterer i følgende udtryk for selvinduktionen af løkken ved lave frekvenser.

$$L_{2LF} = \frac{\mu_0 l_1}{\pi} \ln\left(\frac{2,57 l_2}{t}\right), \quad f < 20 \text{ kHz}$$

Det sidste eksempel på anvendelse af Amperes lov angriber problemet fra en anden vinkel.

Cylinderspole

En lang, cylindrisk spole (engelsk: *solenoid*) er et af de klassiske eksempler på Amperes lov, der findes gengivet i hovedparten af litteraturen. Desværre er der også en klassisk fejl, som flertallet af referencer overser. Selvinduktion findes ved at antage at spolen er så lang at feltet langs dens akse kan anses for konstant, og dertil at feltet er nul udenfor spolen fordi feltlinjerne spredes. Der benyttes et udsnit af en lang spole, udsnittet omfatter N af spolens vindinger og længden af udsnittet er l_{ab} . Hele spolen er altså længere end det undersøgte udsnit for at give et ensartet magnetisk felt – og det er den antagelse der ofte glemmes. Det kan lyde som en strid om hvorvidt månen er lavet af grøn ost, men det har en ret voldsom betydning når resultatet ukritisk anvendes på en spole med kort længde.



Figur 15 – En lang cylindrisk spole med integrationsvejen langs en rektangulær kurve hvor den ene side følger centerlinjen i spolen.

Fra Amperes lov bestemmes den magnetiske fluxtæthed ved integration langs en kurve der går omkring de strømbærende ledere i udsnittet, og her benyttes kurven $a-b-c-d-a$, som vist ovenfor. Kurven omslutter N af spolens vindinger, der bærer samme strøm I , så den omslutede strøm bliver NI . Integrationen består af fire led hver med sin magnetiske fluxtæthed og vejlængde.

$$\mu_0 N I = \int B \cos(\theta) dl = B_{ab} \cos(0^\circ) l_{ab} + B_{bc} \cos(90^\circ) l_{bc} + B_{cd} \cos(0^\circ) l_{cd} + B_{da} \cos(90^\circ) l_{da}$$

Det første stykke $a-b$ ligger inde i spolen hvor den magnetiske fluxtæthed er B_{ab} og stykket har længden l_{ab} så integrationen langs linjestykket giver $B_{ab} l_{ab}$. De to stykker $b-c$ og $d-a$ står vinkelret på feltet så integrationen giver nul idet $\cos(90^\circ) = 0$. Stykket $c-d$ ligger udenfor spolen hvor fluxtætheden antages meget lille da feltlinjerne spredes, så $B_{cd} \approx 0$.

Der er derfor kun et enkelt bidrag af betydning fra integrationen og det er fra linjestykket l_{ab} inde i spoleudsnittet.

$$\mu_0 N I = B_{ab} l_{ab} \Rightarrow B_{ab} = \frac{\mu_0 N I}{l_{ab}}$$

Den magnetiske flux er givet ved den magnetiske fluxtæthed gange med arealet af spolen hvis den magnetiske fluxtæthed kan antages konstant over arealet af spolen. Det er en ganske rimelig antagelse selv om det ikke er korrekt (se Figur 12), men det har ikke en større betydning her.

$$\Phi = B_{ab} A = \frac{\mu_0 N I A}{l_{ab}} = \frac{\pi \mu_0 N I d^2}{4 l_{ab}}$$

Reluktans er et mål for magnetisk modstand og er helt ækvivalent til Ohms lov for et elektrisk kredsløb. Den magnetiske flux er her analog til strømmen og spændingskilden er repræsenteret ved strøm-vingningstallet NI . Den magnetiske modstand, *reluktansen*, er proportional med den magnetiske vejlængde l_{ab} divideret med det arealet A , som magnetfeltlinjerne flyder igennem. Det er en vigtig størrelse ved beregning på kredsløb med magnetiserbar kerne, fx ferrit-kerner.

$$N I = \Phi R_M \Rightarrow R_M = \frac{l_{ab}}{\mu_0 A}$$

Selvinduktionen L_S af det undersøgte udsnit bliver som viste nedenfor hvor formelen til højre benytter arealet af en cirkulær spole med d som diameter. Formlen præsenteres ofte som gældende for en spole med længden l_{ab} [1-154], selv om den kun er udledt for et udsnit af en lang spole.

$$L_S = N \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 A}{l_{ab}} \quad \text{eller} \quad L_S = \frac{\pi \mu_0 N^2 d^2}{4 l_{ab}}, \quad A = \frac{\pi d^2}{4}$$

Formlen kan anvendes for meget lange spoler hvor spolens længde er stor nok til at feltet fra enderne af spolen er "langt væk" og virkningen kan ignoreres ($l > 10d$), men det er en lang og tynd spole, som kun sjældent mødes i praksis. Ignorerer kravet til spolens længde, må man forvente en noget optimistisk værdi for den beregnede selvinduktion. For en spole med længden lig med diameteren ($l = d$) er den beregnede værdi 45 % for høj, og for $l = 0,5d$ er fejlen oppe på 90 % så den faktiske spole har kun cirka halvdelen af den beregnede værdi.

Selvinduktionen per vikling er en konstant værdi for lange spoler. Længden af spolen kan for en tætliggende bevikling udtrykkes ved antallet af vindinger N gange trådens tykkelse t .

$$l_{ab} = N t \Rightarrow L_S = \frac{\pi \mu_0 N^2 d^2}{4 N t} = \frac{\pi \mu_0 N d^2}{4 t} \Rightarrow \frac{L_S}{N} = \frac{\pi \mu_0 d^2}{4 t}$$

Den lange cylinderspole fra side 11 har en diameter på $d = 10,9$ mm og trådtykkelsen $t = 0,32$ mm hvilket giver $L_S/N = 0,366$ μH som selvinduktionen per vinding, så for et vindingstal på $N = 200$ bliver $L_S = 73$ μH , hvilket kun er 13 % fra den målte værdi (65 μH).

Toroidspolen er en cylinderspole der er bøjet til cirkelform hvorved de to ender møder hinanden så problemet med randfeltet ved enderne af spolen løses, men til gengæld skal feltet løbe langs en cirkulær bane. Selvinduktionen er tæt på L_S , men nøjagtigheden er ukendt. Den samlede længde af spoleudsnittet bliver $l_{ab} = \pi D$, hvor D er den gennemsnitlige diameter af toroiden. Spolens bevikling har som før diameteren d og der er N vindinger.

$$L_T = \frac{\mu_0 N^2 d^2}{4 D}$$

Normal spole

Det er muligt at inkludere randfeltet i udledningen og det resulterer i en stærkt forbedret formel, der kan benyttes for spoler med en længde l ned til $0,125d$, svarende til en fjerdedel af radius hvor den maksimale fejl holdes indenfor 3,5 %, men formelen er brugbar ned til en længde på en tiendedel af spolens diameter hvor fejlen er på -6 %.

$$L_N = \frac{\mu_0 N^2 A}{l+0,42d} \quad \text{eller} \quad L_N = \frac{\pi}{4} \frac{\mu_0 N^2 d^2}{l+0,42d}$$

Metoden, som er gennemgået i appendiks, følger samme fremgangsmåde som fra forrige afsnit, men feltet antages ikke at falde til nul ved enden af spolen. I stedet indsættes det at den magnetiske fluxtæthed ved enden af spolen B må være lig med B_{ab} fra forrige afsnit. Den magnetiske flux spredes udenfor spolens ender, men det vises i et senere afsnit at feltet aftager stærkt i stigende afstand fra spolen, relationen er af tredje orden så hovedparten af den magnetiske flux må ligge indenfor et smalt bånd omkring spolen. Det vises under denne antagelse at halvdelen af den magnetiske flux løber i et bånd der har samme tykkelse som spolens radius. Dertil kommer en antagelse om at feltet spredes på ydersiden af spolen når den ikke er meget kort.

Når de forskellige antagelser bliver kombineret vil Amperes lov få tilføjet leddet $0,42 B d$ som der ved introducerer diameteren i udtrykket.

$$\mu_0 N I = B l + 0,42 B d \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 N I}{l + 0,42 d} \quad \Rightarrow \quad L_N = N \frac{B A}{I} = \frac{\mu_0 N^2 A}{l + 0,42 d}$$

Formlen har stor lighed med Wheelers formel, der har 0,45 som faktor til diameteren, men der er ikke tale om en udledning heraf. Derimod er udledningen et forsøg på at nå frem til en generelt anvendelig formel gennem brug af forholdsvis ukompliceret matematik og resultatet er i denne artikel kaldet formelen for en *Normal* spole. Ved søgning på internettet ses også brug af formler med 0,43 som faktor til diameteren, så der er mange bud på et kompromis.

Biot og Savarts lov

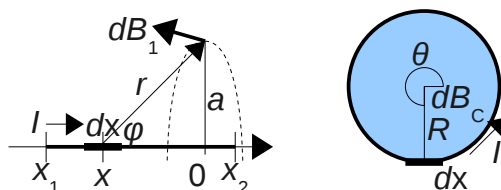
Fra Amperes lov vides at det magnetiske felt fra en uendelig lang leder aftager med første orden af afstanden (side 19), og hvis den uendeligt lange leder foldes sammen til et lederpar med vil feltet aftage med anden orden af afstanden (side 21). Det forudsætter at lederen er uendelig lang, men hvad med feltet fra en kort leder der tilmed vikles op til en spole? Svaret er at feltet aftager med tredje orden i stor afstand fra spolen.

For at undersøge spørgsmålet, er det nødvendigt at introducere et nyt værktøj, der er en parallel til Amperes lov, men hvor den magnetiske fluxtæthed bestemmes i et punkt i rummet som følge af strømmen i et linjestykke. Biot & Savarts lov giver mulighed for at arbejde med linjestykker, og dermed modificere overvejelser baseret på Amperes lov, og dertil en regel om feltet som funktion af afstanden, som påbyder det magnetiske felt at aftage med afstanden i tredje når afstanden fra spolen er stor i forhold til spolens dimensioner.

Strømmen I i linjestykket dx giver et bidrag til den magnetiske fluxtæthed på dB i det punkt som vektoren r peger mod. Krydsproduktet mellem dx og r beregnes som dx gange r gange sinus til vinklen mellem dx og r , og den resulterende magnetiske fluxtæthed i punktet B beregnes ved at integrere dB over linjens længde fra x_1 til x_2 .

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{x} \times \vec{r}}{r^3} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0 I dx \sin(\phi)}{4\pi r^2} \quad \text{og} \quad B = \int dB$$

Metoden er at vælge punktet hvor den magnetiske fluxtæthed skal beregnes og så gennemføre integrationen over hele lederens længde. Det skal vises for en enkeltleder og en cirkel.



Figur 16 – Biot og Svarts lov vist i afstanden a for en leder (venstre) og en cirkel med radius R (højre) med strømmen I orienteret som anført. Den magnetiske fluxtæthed dB i et punkt beregnes ved at summere (integrere) bidragene fra korte lenjeselementer dx i henhold til princippet om superposition. For begge eksempler er magnetfeltet vinkelret på papiret.

Enkelt leder

Et eksempel er vist til venstre i figuren for et linjeselement dx på en ret linje fra x_1 til x_2 , og som bærer strømmen I . Det er en smule teoretisk fordi der ikke tages hensyn til at strømmen skal føres til og fra lederen, så resultatet kan kun benyttes for en leder der udgør en del af et større kredsløb og beskriver kun det bidrag som lederen giver. Sinus til vinklen ϕ mellem dx og dB_1 er givet ved den retvinklede trekant $0-x-dB_1$ som modstående side a divideret med hypotenusen r [4-126] og hypotenusen r er givet ved katederne i den retvinklede trekant efter Pythagoras [4-67].

$$dB_1 = \frac{\mu_0 I \sin(\phi)}{4\pi r^2} dx = \frac{\mu_0 I a}{4\pi r^3} dx \quad \text{hvor} \quad \sin(\phi) = \frac{a}{r} \quad \text{og} \quad r = \sqrt{x^2 + a^2}$$

Den magnetiske fluxtæthed i punktet findes ved integration fra x_1 til x_2 og selve integrationen kan klares ved hjælp af en tabel over integraler [4-160, 5-67].

$$B_1 = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(\sqrt{x^2 + a^2})^3} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \left[\frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + a^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + a^2}} \right]$$

En uendelig lang leder skal give samme resultat som udledt ved Amperes lov (side 19). Leddene i den firkantede parentes går mod 1 og -1 så parentesen giver 2 og resultatet bliver som ventet.

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4 \pi a} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\mu_0 I}{4 \pi a} [1 - (-1)] \Rightarrow \boxed{B_1 = \frac{\mu_0 I}{2 \pi a}}$$

En kort leder kan eksempelvis defineres som en leder med en længde på det dobbelte af afstanden til observationspunktet ($x_1 = -a$ og $x_2 = a$). Den magnetiske fluxtæthed i afstanden a bliver reduceret med faktor $(\sqrt{2})/2 = 0,71$ i forhold til en uendelig lang leder, en reduktion på 29 %.

$$B_K = \frac{\mu_0 I}{4 \pi a} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right]_{-a}^a = \frac{\mu_0 I}{4 \pi a} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \Rightarrow \boxed{B_K = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\mu_0 I}{2 \pi a}}$$

Er lederens længde 2π gange afstanden til punktet ($x_1 = -\pi a$ og $x_2 = \pi a$) bliver fejlen 5 % og for et punkt i afstanden 10 % af lederens længde ($x_1 = -5a$ og $x_2 = 5a$) er fejlen 2 %. Det betyder at længden af lederen er uden betydning når afstanden til punktet er lille i forhold til længden.

Et kvadrat med fire ens sider, hver med længden $2a$, har feltstyrken B_4 i centrum af kvadratet givet ved loven om superposition som summen af de fire bidrag på hver B_K .

$$B_4 = 4 B_K \Rightarrow \boxed{B_4 = 2\sqrt{2} \frac{\mu_0 I}{2 \pi a}}$$

Bemærk, at formlerne kun angiver den magnetiske fluxtæthed i centrum af spolen; feltet vil altid stige i nærheden af lederen i henhold til Amperes lov.

Cirkulær leder

For en leder formet til en cirkel med radius R er linjestykket langs periferien $dx = R d\theta$ hvor θ løber fra 0 til 2π . Vinklen mellem linjesegmentet dx (tangent til cirklen) og radius er $\varphi = 90^\circ$ så vi har $\sin(\varphi) = 1$. Den magnetiske fluxtæthed i centrum af cirklen er let at beregne idet afstanden til dx er konstant og lig med R . Indsættelse i udtrykket for Biot & Savart giver dB_C i centrum af cirklen, og ved integrationen over θ er alle led konstante undtagen $d\theta$. Integrationen af $d\theta$ fra 0 til 2π giver resultatet 2π .

$$dB_C = \frac{\mu_0 I}{4 \pi R^2} \cdot 1 \cdot R d\theta \Rightarrow B_C = \frac{\mu_0}{4 \pi R} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4 \pi R} 2\pi \Rightarrow \boxed{B_C = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{d}}$$

I centrum af en cirkel med $I = 1$ A og $d = 100$ mm ($R = 50$ mm) er $B_C = 12,6$ μ T. Magnetfeltets styrke stiger over dette niveau ved reduceret afstand fra lederen i henhold til Amperes lov.

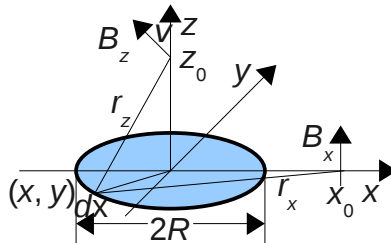
Den magnetiske fluxtæthed i centrum af cirklen er derfor 2π gange den magnetiske fluxtæthed i afstanden R fra en uendelig lang leder, så effekten af at vikle lederen til en cirkel er betydelig. Til gengæld for det mere koncentrerede magnetiske felt inde i spolen reduceres det magnetiske felt udenfor spolen; dels fordi lederen nu er af endelig længde og dels fordi feltretningen i stor afstand fra spolen modvirkes af bidragene fra modstående sider.

Selvinduktionen kan i princippet beregnes af dette udtryk, men resultatet er temmelig nedslående fordi det er forkert at antage at den magnetiske fluxtæthed er konstant over spolens areal. Resultatet vises nedenfor og beregner en spole med $d = 100$ mm til $L_C = 100$ nH, hvor et mere præcist resultat er $L_{K1} = 345$ nH (for en tråddykkelse på 1/100 af diameteren, se side 55).

$$L_{C1} = \frac{\Phi_C}{I} = \frac{B_C A_C}{I} = \frac{\mu_0 \pi}{d} \frac{d^2}{4} = \frac{\pi \mu_0 d}{4}$$

Afstandsregel

Materialet er nu klart til at bestemme den magnetiske fluxtæthed i en vis afstand fra centrum af en spole. Konklusionen er at den magnetiske fluxtæthed aftager med afstanden i tredje, så feltet krummer hurtigt tilbage omkring løkkens yderside og spredes kun lidt udenfor det volumen som spolen afgrænser. Den analytiske undersøgelse vil blive begrænset til to retninger; den ene retning er langs akserne gennem centrum, hvor symmetrien tillader udledning af et eksakt resultat, og den anden retning er langs radius væk fra centrum, hvor problemet må simplificeres.



Figur 17 – Den magnetiske fluxtæthed bestemmes først i højden z_0 over cirkelns centrum, og dernæst langs radius i afstanden x_0 fra cirkelns centrum.

Feltet langs akserne B_z bestemmes i afstanden z_0 over centrum af cirklen med radius R . Afstanden r_z fra et punkt på cirklen $(x, y, 0)$ til punktet $(0, 0, z_0)$ er givet ved Pythagoras og vinklen θ integreres fra 0 til 2π . Linjeelementet langs cirkelns periferi er $dx = R d\theta$ og da dx står vinkelret på radius er $\sin(\varphi) = 1$. Feltet for B_z er ikke parallelt med akserne (undtagen for $z_0 = 0$), så det skal projiceres ind på akserne ved at gange med $\cos(\nu) = R/r_z$.

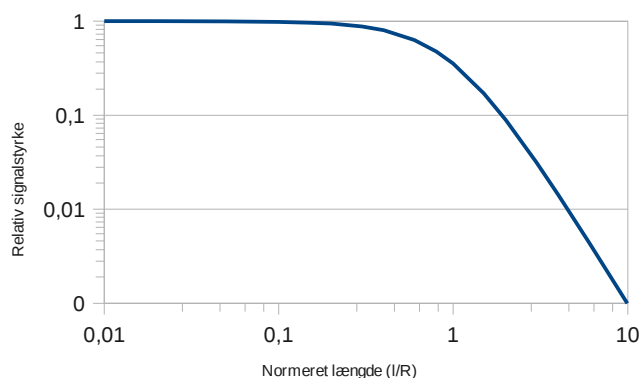
$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_z^2} \sin(\varphi) \cos(\theta) dx = \frac{\mu_0 I}{4\pi (R^2 + z_0^2)} \frac{R}{\sqrt{R^2 + z_0^2}} R d\theta$$

Den magnetiske fluxtæthed i højden $z_0 = 0$ er identisk med det tidligere udtryk (cirkelns centrum), mens den for store værdier af x_0 aftager med afstanden i tredje, så spolen er ikke en "strålekanon", der skyder magnetfeltet langt væk, tvært imod holder den feltet tæt ved spolen.

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2}{(\sqrt{R^2 + z_0^2})^3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \frac{R^3}{(\sqrt{R^2 + z_0^2})^3} 2\pi = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{1}{(\sqrt{1 + (z_0/R)^2})^3}$$

I centrum af en cirkel med $I = 1$ A og $R = 50$ mm er $B_z = 12,6 \mu\text{T}$ for $z_0 = 0$, i overensstemmelse med det tidligere eksempel med B_c , og værdien er reduceret til $B_z = 4,44 \mu\text{T}$ for $z_0 = R$.

Relationen er vist nedenfor hvor leddet $\mu_0 I / 2R$ ikke er medtaget så maksimum på 1 betyder at den magnetiske fluxtæthed er på sin fulde værdi i centrum.



Figur 18 - Den magnetiske fluxtæthed i afstanden l langs akserne fra en spole med radius R .

For kort afstand fra cirkelns centrum har leddet med kvadratroden ingen større betydning og den magnetiske fluxtæthed er konstant; den er indenfor 2 % for $x_0 < R/10$. I stor afstand fra cirkelns centrum kan 1-tallet ignoreres og resultatet bliver en omvendt proportionalitet med afstanden i tredje. Ved $x_0 = 3R$ er tilnærmelsen indenfor 20 % og ved $z_0 = 5R$ er fejlen 6 %.

$$B_z \approx \frac{\mu_0 I}{2R}, \quad z_0 \ll R \quad \text{og} \quad B_z \approx \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{R}{z_0}\right)^3, \quad z_0 \gg R$$

Feltet langs radius B_x i spolens plan bestemmes som den magnetiske fluxtæthed i punktet x_0 , der er placeret langs x -aksen, men på grund af symmetrien kunne ligge hvor som helst i xy -planet i afstanden x_0 fra centrum. Positionen af linjestykket dx langs periferien af cirklen er givet ved vektor r_{xy} med længden R og vinklen θ der løber fra 0 til 2π . Afstandsvektoren fra linjestykket dx til punktet x_0 kaldes r , og længden af linjestykket dx er givet ved cirkelbuestykket $Rd\theta$ med en retning svarende til en drejning på 90° i positiv retning af radiusvektor [4-78].

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_{xy} = \begin{pmatrix} R \cos(\theta) \\ R \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \vec{r}_0 - \vec{r}_{xy} = \begin{pmatrix} x_0 - R \cos(\theta) \\ -R \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{dx} = \begin{pmatrix} -Rd\theta \sin(\theta) \\ Rd\theta \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Længden af r vil for $x_0 = R$ svinge mellem 0 og 2, så den er ikke rar at have i nævneren for dB så i stedet vil der blive anvendt en gennemsnitsværdi, som bestemmes for cosinus lig nul. Det er en god tilnærmelse for punkter langt udenfor cirkelns periferi, men fejlen er betydelig for punkter på eller nær ved cirkelns periferi, så det generelle forhold skal undersøges senere. Afstanden bliver derfor repræsenteret ved det tilnærmede udtryk vist til højre.

$$|\vec{r}| = \sqrt{x_0^2 + R^2 - 2x_0 R \cos(\theta)} = R \sqrt{1 + \left(\frac{x_0}{R}\right)^2 - 2\frac{x_0}{R} \cos(\theta)} \Rightarrow \langle \vec{r} \rangle = R \sqrt{1 + \left(\frac{x_0}{R}\right)^2}, \quad x_0 \geq R$$

Krydsproduktet giver nedenstående resultat [4-78], hvor der kun er en komponent langs z -aksen. Det betyder at feltretningen står vinkelret på cirkelns plan, og det er i god tråd med opfattelsen af det magnetiske felt efter Amperes lov som cirkulært omkring lederen.

$$\vec{dx} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} -Rd\theta \sin(\theta) \\ Rd\theta \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0 - R \cos(\theta) \\ -R \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R^2 d\theta \sin^2(\theta) - Rd\theta \cos(\theta)(x_0 - R \cos(\theta)) \end{pmatrix}$$

Udtrykket for z -komponenten reduceres og det udnyttes at $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$.

$$\vec{dx} \times \vec{r} = R^2 d\theta \sin^2(\theta) - x_0 Rd\theta \cos(\theta) + R^2 d\theta \cos^2(\theta) \Rightarrow \vec{dx} \times \vec{r} = R^2 d\theta [1 - x_0 \cos(\theta)]$$

Den inkrementelle magnetiske fluxtæthed i punktet x_0 kan nu bestemmes ved at samle leddene til den magnetiske fluxtæthed i det betragtede punkt.

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dx} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2 - x_0 R \cos(\theta)}{R^3 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{x_0}{R}\right)^2}\right)^3} d\theta = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R \left(\sqrt{1 + \left(\frac{x_0}{R}\right)^2}\right)^3} \left[1 - \frac{x_0}{R} \cos(\theta)\right] d\theta$$

Integrationen deles op i to separate integraler svarende til de to led i den firkantede parentes. Det første er et integral af $d\theta$ over intervallet 2π , der giver 2π , og det andet er et integral af cosinus over intervallet 2π , der giver 0. For store værdier af x_0 kan udtrykket simplificeres til den viste relation af tredje orden. Det negative fortegn angiver at feltets retning udenfor spolen er modsat

rettet feltet inde i spolen. Beregningen er gennemført med den antagelse at afstanden var stor i forhold til radius ($x_0 \gg R$), så udtrykket skal ikke tolkes for nøje tæt på spolen; forholdene er mere komplicerede tæt på spolen, hvilket undersøges i et efterfølgende afsnit.

$$B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R \sqrt{1 + \left(\frac{R}{x_0}\right)^2}} \left[\int_0^{2\pi} d\theta - \frac{x_0}{R} \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta \right] = -\frac{\mu_0 I}{2R \sqrt{1 + \left(\frac{x_0}{R}\right)^2}}$$

Anvendes forudsætningen om stor afstand fra spolen bliver den asymptotiske værdi den søgte relation af tredje orden.

$$B \xrightarrow{x_0 \rightarrow \infty} -\frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{R}{x_0}\right)^3, \quad x_0 \gg R$$

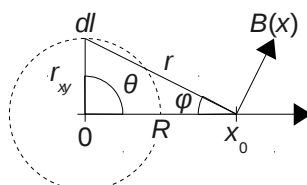
Konklusionen for feltstyrken er at afstandsreglen giver en relation af tredje orden mellem den magnetiske fluxtæthed B og afstanden r fra spolen, når afstanden til spolen er væsentligt større end spolens udstrækning. Dette udtryk anvendes blandt andet i afsnittet om "Normal spole".

$$|B(r)| \approx \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{R}{r}\right)^3, \quad r \gg R$$

Hermed forlades den fundamentale lære om magnetisme og interessen rettes imod det egentlige formål, at bestemme selvinduktionen af en spole. Det værktøj, der skal introduceres er den gensidige induktion, der er et mål for hvordan to vindinger i en spole kobler med hinanden.

Simpel spole

En simpel spole dannes ved at bukke en leder til en cirkel og den magnetiske fluxtæthed kan beregnes for et punkt langs x-aksen ved at integrere alle bidrag fra cirklen. Integrationen udføres numerisk og det vises at et simpelt matematisk udtryk kan benyttes for at beskrive den magnetiske fluxtæthed. En simpel formel for selvinduktionen kan udledes fra dette udtryk.



Figur 19 - Den magnetiske fluxtæthed $B(x)$ i punktet x_0 beregnes ved at summere bidrag fra korte linjestykker dl langs med den cirkelformede leder.

Magnetisk fluxtæthed

Den magnetiske fluxtæthed bestemmes i punktet x_0 , der er placeret langs x-aksen, og som på grund af symmetrien kunne ligge hvor som helst i xy -planet i afstanden x_0 fra centrum. Positionen af linjestykket dl langs periferien af cirklen er givet ved vektor r_{xy} med længden R og en vinkel θ , der løber fra 0 til 2π . Vektoren fra linjestykket dl til punktet x_0 kaldes r , og længden af linjestykket dl er givet ved cirkelbuestykket $Rd\theta$, med en retning svarende til en drejning på 90° i positiv retning; det vil sige i retning af tangenten i punktet som vektor r_{xy} angiver [4-78].

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_{xy} = \begin{pmatrix} R \cos(\theta) \\ R \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \vec{r}_0 - \vec{r}_{xy} = \begin{pmatrix} x_0 - R \cos(\theta) \\ -R \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{dl} = \begin{pmatrix} -Rd\theta \sin(\theta) \\ Rd\theta \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Biot & Savarts lov benytter krydsproduktet mellem vektorerne dl og r , som giver nedenstående resultat [4-78]. Der er kun en komponent langs z-aksen, så feltretningen står vinkelret på planet.

$$\vec{dl} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} -Rd\theta \sin(\theta) \\ Rd\theta \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0 - R \cos(\theta) \\ -R \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R^2 d\theta \sin^2(\theta) - Rd\theta \cos(\theta)(x_0 - R \cos(\theta)) \end{pmatrix}$$

Koordinatet i z-aksens retning reduceres og det udnyttes at $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ [4-125, 5-12].

$$\vec{dl} \times \vec{r} = (R^2 - x_0 R \cos(\theta)) d\theta$$

Længden af vektor r er en funktion af observationspunktet x_0 og vinklen θ , og for $x_0 = R$ er den nul ved $\theta = 0$, hvilket giver problemer ved divisionen i Biot & Savarts lov.

$$|r| = \sqrt{(x_0 - R \cos(\theta))^2 + (R \sin(\theta))^2} = \sqrt{x_0^2 + R^2 - 2x_0 R \cos(\theta)} = R \sqrt{1 + \left(\frac{x_0}{R}\right)^2 - 2\frac{x_0}{R} \cos(\theta)}$$

Vinklen θ er ikke kontinuert ved den numeriske analyse, men antager diskrete værdier over et interval på 2π , der deles op i M lige store dele så ændringen $d\theta$ er en konstant faktor. Additionen med 0,5 har til formål at undgå den førnævnte division med nul.

$$\theta_m = \frac{2\pi(m+0,5)}{M}, \quad m = 0, 1, \dots, M-1 \quad \text{og} \quad d\theta = \frac{2\pi}{M}$$

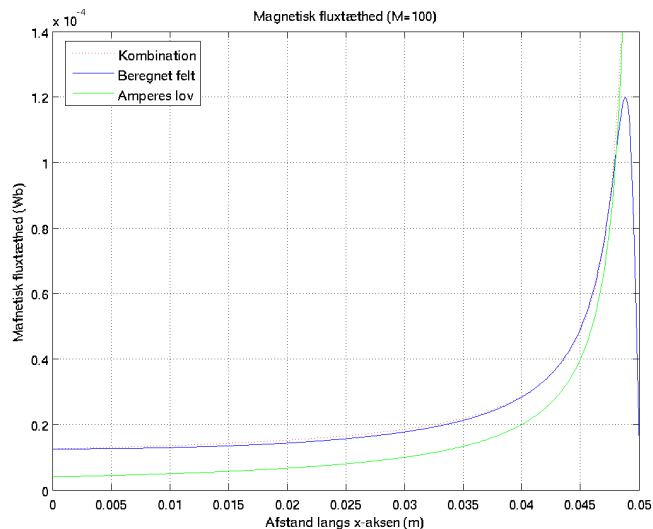
Den magnetiske fluxtæthed langs z-aksen beregnes ved at summere bidragene.

$$B_z(x) = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{R^2 - x_0 R \cos(\theta_m)}{\left(R \sqrt{1 + \left(\frac{x_0}{R}\right)^2 - 2 \frac{x_0}{R} \cos(\theta_m)} \right)^3} \frac{2\pi}{M}$$

Efter reduktion findes den magnetiske fluxtæthed i retningen vinkelret på spolens plan.

$$B_z(x) = \frac{\mu_0 I}{2MR} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1 - \frac{x_0}{R} \cos(\theta_m)}{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{x_0}{R}\right)^2 - 2 \frac{x_0}{R} \cos(\theta_m)} \right)^3}$$

Den magnetiske fluxtæthed vises nedenfor som den blå linje for en spole med radius på 50 mm og en strømstyrke på 1 A, som skal give $B_C = \mu_0/2R = 12,57 \mu\text{H}/\text{m}^2$ i centrum.



Figur 20 – Den beregnede magnetiske fluxtæthed for en cirkulær spole med radius på 50 mm og en strømstyrke på 1 A (blå streg), sammenlignet med fluxtætheden i tilsvarende afstand fra en uendelig lang og lige leder efter Amperes lov (grøn linje). Den punkterede, røde linje repræsenterer et muligt bud på en formel for den magnetiske fluxtæthed, kaldet B_K .

Til sammenligning vises resultatet ved brug af Amperes lov $B_1 = \mu_0/2\pi(R - x)$, der er vist med en grøn linje. Den magnetiske fluxtæthed i centrum er $B_1 = \mu_0/2\pi R = 4,0 \mu\text{H}/\text{m}^2$ ved samme strømstyrke og i en afstand på 50 mm fra en uendelig lang og lige leder. Algoritmens blå linje falder af tæt på lederen på grund af det lave antal linjesegmenter, men der kan opnås bedre overensstemmelse ved brug af et større antal segmenter.

En kombinationsformel, som reproducerer forløbet, kan nås ved at B_1 fra Amperes lov tilføjes en konstant, som giver B_C i centrum. Det er relativt let at indse at der skal adderes $(\pi - 1)/\pi$ gange med B_C for at opnå korrekt niveau ved $x_0 = 0$. Formlen er plottet med stippet, rød streg og ses generelt at ligge lidt over algoritmens værdi. Udtrykket vil blive refereret i det følgende idet det giver et godt bud på en formel for selvinduktionen af en spole med en enkelt vinding.

$$B_K = \frac{\pi - 1}{\pi} \frac{\mu_0 I}{2R} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(R - x_0)}$$

Magnetisk flux

Den magnetiske flux beregnes ved at integrere den magnetiske fluxtæthed over spolens plan og integrationen udføres numerisk for at opnå en reference. Derefter foretages en analytisk beregning af den magnetiske flux fra udtrykket for B_K .

Integration over cirkelns areal benytter et smalt bånd i afstanden x fra centrum og bredden dx , så længden af båndet er $2\pi x$ og arealet bliver $dA = 2\pi x dx$. Ved beregningen af den magnetiske fluxtæthed blev benyttet $N = 501$ diskrete værdier for afstanden fra centrum til cirkelns periferi, så bredden af det enkelte bånd bliver $dx = R/(N - 1) = 100 \mu\text{m}$.

$$\Phi_A = \int_{\text{Areal}} B dA = \sum_{n=0}^{N-1} B(x) 2\pi x(n) dx = \frac{2\pi R}{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} B(x) x(n)$$

Resultatet vil for en uendelig tynd elektrisk leder gå imod uendelig, så det er nødvendigt at stoppe summen ved den øvre værdi, der svarer til oversiden af lederen. Med cirkelns radius R regnet til centrum af lederen og tråddykkelsen t , vil den øvre grænse blive defineret af:

$$R_{\text{max}} = R - \frac{t}{2}$$

Resultatet afhænger af M , antallet af punkter langs med cirkelns periferi, og N , antallet af punkter langs radius, så begge værdier blev sat op gradvist indtil resultatet stabiliserede sig. Værdien var en magnetisk flux på $296,1 \mu\text{Wb}$, og forblev uændret for ændring af $M = 1000$ til 2000 , mens den faldt $0,1 \%$ ved ændring af $M = 4951$ til 9901 . Den lave værdi svarer til $dx = 10 \mu\text{m}$ og kræver lidt under 5 millioner beregninger, hvilket med MATLAB på en $2,4 \text{ GHz}$ processor tog blot 5 s.

Selvinduktionen findes ved at dividere den magnetiske flux gennem arealet med strømstyrken. Ved spolen med radius $R = 50 \text{ mm}$ og tråddykkelsen $t = 1 \text{ mm}$ blev den magnetiske flux som vist ovenfor $\phi = 296,1 \text{ nWb}$, og det giver referencen til $L_A = 296,1 \text{ nH}$.

Ved anvendelse af det kombinerede udtryk B_K kan den magnetiske flux gennem en spole med radius R og en tråddykkelse på t bestemmes ved at integrere fra centrum ($x = 0$) til overfladen af lederen ($x = R - t/2$). Integrationen foregår langs et cirkulært bånd i afstanden x fra centrum og med bredden dx , så længden af båndet er $2\pi x$ og arealet bliver $dA = 2\pi x dx$.

$$\Phi_K = \int_0^{R-t/2} B_K dA = \int_0^{R-t/2} \left(\frac{\pi-1}{\pi} \frac{\mu_0 I}{2R} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(R-x)} \right) 2\pi x dx$$

De konstante led kombineres til $\mu_0 I/R$, som sættes udenfor integralet og π forkortes ud. Variablen x substitueres med $\beta = x/R$ for at lette brugen af et tabelværk ved løsning af integrationen, og det giver $d\beta = dx/R$, hvoraf $dx = R d\beta$, og derfor $x dx = R^2 \beta d\beta$, hvor R^2 sættes ud foran og ændrer den konstante faktor til $\mu_0 R I$. Den øvre grænse bliver $\beta = 1 - t/2R$ og integralet deles op i to.

$$\Phi_K = \mu_0 R I \left(\int_0^{1-t/2R} (\pi-1) \beta d\beta + \int_0^{1-t/2R} \frac{\beta d\beta}{1-\beta} \right)$$

De to integraler løses ved hjælp af et tabelværk [4-153, 5-57 og 60].

$$\Phi_K = \mu_0 R I \left((\pi-1) \left[\frac{\beta^2}{2} \right]_0^{1-t/2R} + [-\beta - \ln|1-\beta|]_0^{1-t/2R} \right)$$

Kun den øvre grænse giver et bidrag idet alle led er nul for $\beta = 0$. Den magnetiske flux bliver en funktion af både radius i vindingen og trådens tykkelse.

$$\Phi_K = \mu_0 RI \left((\pi - 1) \frac{(1 - t/2R)^2}{2} - \left(1 - \frac{t}{2R}\right) - \ln \left| \frac{t}{2R} \right| \right)$$

Det udnyttes at trådtykkelsen er lille i forhold til radius ($t/2R \ll 1$) og logaritmens negative fortegn fjernes ved at benytte det reciprokke til argumentet. Konstanten omskrives ved $x = \ln(\exp(x))$ og de to led kan samles ved reglen om addition af logaritmer $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ [4-121, 5-23], som giver faktoren til radius på 2 gange med $\exp(0,071)$ til 2,15.

$$\Phi_K = \mu_0 RI \left(\frac{\pi - 1}{2} - 1 + \ln \left(\frac{2R}{t} \right) \right) = \ln \left(\frac{2R}{t} \right) + 0,071 = \mu_0 RI \left(\ln \left(\frac{2,15R}{t} \right) \right)$$

Med $R = 50$ mm og $t = 1$ mm bliver den magnetiske flux $\phi = 293,9$ nWb, hvilket er 0,8 % under den værdi der blev fundet ved en numeriske analyse. Det er ikke et bevis for den kombinerede formel, ikke mindst fordi en numerisk beregning aldrig kan være eksakt; og det gælder specielt når der er en singularitet inde i billedet.

Selvinduktion

Ved division med strømmen findes et udtryk for selvinduktionen.

$$L_K = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 R \ln \left(\frac{2,15R}{t} \right) = \frac{\mu_0 d}{2} \ln \left(\frac{1,073d}{t} \right)$$

Beregningen inkluderer ikke selvinduktionen fra feltet inde i lederen, der er en funktion af hvor lang tråden er, med værdien $\mu_0 I_1 / 8\pi$ (se afsnittet side 21). Længden af tråden er $l_1 = 2\pi R$ så der er et tillæg på $\mu_0 R / 4$, og det inkluderes på samme vis som ved konstanten ovenfor. Det resulterende udtryk har index "K0", hvor K valgfrit kan opfattes som "kombinationsudtrykket" eller "kort spole", og 0 angiver at værdien kun gælder ved lave frekvenser; under cirka 20 kHz.

$$L_{K0} = \mu_0 R \ln \left(\frac{2,15R}{t} \right) + \frac{\mu_0 R}{4} \Rightarrow L_{K0} = \mu_0 R \ln \left(\frac{2,76R}{t} \right) = \frac{\mu_0 d}{2} \ln \left(\frac{1,38d}{t} \right)$$

Resultatet er forbløffende tæt på det udtryk der tilskrives Maxwell (side 54), uden dog på nogen måde at være en udledning heraf; forskellen er blot 0,15 % ved $d/t = 100$. Resultatet afviger fra referenceafsnittets korte spole (side 55), men det er baseret på en model hvor strømmen løber i en uendelig tynd folie (*current sheet*) og selvinduktionen vokser derfor hurtigere mod uendelig når spolens længde går imod nul end for det nærværende udtryk.

Hvis trådtykkelsen ikke kan ignoreres, må parenteser for ϕ_K ganges ud og minusset foran logaritmen fjernes igen ved at invertere argumentet.

$$\Phi_K = \mu_0 RI \left(\frac{\pi - 1}{2} \left(1 + \left(\frac{t}{2R} \right)^2 - \frac{t}{R} \right) - 1 + \frac{t}{2R} + \ln \left(\frac{2R}{t} \right) \right)$$

Leddene af anden orden ignoreres og de øvrige led samles.

$$\Phi_K = \mu_0 RI \left(\frac{\pi - 1}{2} - 1 - \frac{\pi - 1}{2} \frac{t}{R} + \frac{t}{2R} + \ln \left(\frac{2R}{t} \right) \right)$$

Konstanten simplificeres og leddet foran logaritmen omskrives som forberedelse til multiplikation med logaritmens argument, ved at benytte identiteten $\ln(\exp(x)) = x$.

$$\Phi_K = \mu_0 RI \left(\ln \left(\exp \left(\frac{\pi - 3}{2} - \frac{\pi t}{2R} \right) \right) + \ln \left(\frac{2R}{t} \right) \right)$$

Eksponentialfunktionen skrives mere effektivt ved brug af $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$. Derved bliver første del af udtrykket $\exp((\pi - 3)/2) = 1,073$ og ved brug af $d = 2R$ kan udtrykket skrives på samme måde som det kompakte udtryk fra før, men med en lille korrektion i argumentet til logaritmen.

$$\Phi_K = \mu_0 RI \left(\ln \left(\frac{c d}{t} \right) \right), \quad c = 1,073 \cdot \exp \left(\frac{-\pi t}{d} \right)$$

Ved tynd tråd ($t \rightarrow 0$) går eksponentialfunktionen mod én og giver det kendte udtryk (ved høj frekvens). For betydende trådtykkelse ses en reduktion af faktoren 1,073 så selvinduktion falder hurtigere med stigende trådtykkelse end givet ved udtrykket for L_{K0} alene. Ved $t = d/100$ er der en reduktion på 3 % og det giver anledning til et fald i selvinduktionen på 0,7 % hvilket ikke af større betydning, hvorimod reduktionen er på 10 % ved $t = d/30$, hvor selvinduktionen falder 3 % og det markerer således en øvre grænse for forholdet mellem d og t .

Software:

```
% CirkelformetSpole.m

my=4*pi*1e-7;      % Magnetisk konstant (H/m).
R=0.05;           % Spolens radius (m).
t=0.001;          % Trådens diameter (m).
Rmax=R-t/2;       % Integrationens øvre grænse (m).
x0=0:0.00001:Rmax; % Koordinat langs x-aksen (m).
M=1000;           % Antal linjesegmenter langs periferien.

% Magnetisk fluxtæthed.
Bz=zeros(1,length(x0));
for m=0:M-1
    t=2*pi*(m+0.5)/M;
    Bz=Bz+(1-x0*cos(t)/R)./(sqrt(1+(x0/R).^2-2*x0*cos(t)/R).^3);
end
Bz=Bz*my/(2*R*M);
BC=my/(2*R);
B1=my./(2*pi*(R-x0+eps));
BT=BC*(pi-1)/pi+B1;
plot(x0,BT,'r', x0,Bz,'-b', x0,B1,'-g')
title(['Magnetisk fluxtæthed (M=' num2str(M) ')'])
xlabel('Afstand langs x-aksen (m)')
ylabel('Magnetisk fluxtæthed (Wb/m^2)')
legend('Kombination','Beregnet felt','Amperes lov','Location','NorthWest')
grid on
axis([0 0.05 0 1.4e-4])

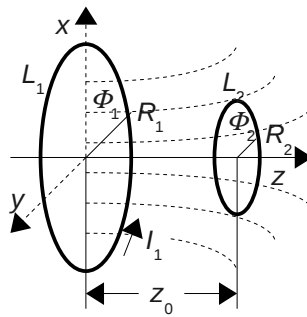
% Magnetisk flux
Fx=0;
N=length(x0);
for n=1:N
    Fx=Fx+Bz(n)*2*pi*R*x0(n)/N;
end
disp(['M=' num2str(M) ' N=' num2str(N) ' Fx=' num2str(Fx) ' Wb'])
%print -dpng /media/disk/Torean/artikel/FormlerForSpoler/MATLAB/printfile.png
```

SELVINDUKTION

Som vist side 17 kan selvinduktionen bestemmes ud fra den magnetiske flux ved at dividere med strømmen i spolens vindinger. Opgaven er derfor at finde et udtryk for den magnetiske flux i en given spole, og udgangspunktet er her den kombinerede formel for magnetisk fluxtæthed B_K fra det tidligere kapitel. Den magnetiske flux, der kan overføres til en anden vinding, kan beregnes herfra, og det leder til introduktion af den gensidige induktion, som igen giver en algoritme for en beregning af en generel spolers selvinduktion. Bemærk, at dette kapitel er under revision.

Gensidig induktion

En spole udsender et magnetfelt når den gennemløbes af en strøm, og hvis strømmen oscillerer vil magnetfeltet også oscillere og det vil derfor generere et oscillerende spændingsfald over en ekstern spole, der gennemstrømmes af magnetfeltet. To spoler kobler følgelig med hinanden og denne påvirkning kaldes for spolernes *gensidige induktion*, med betegnelsen M efter det engelske udtryk for gensidig, *mutual*, og med enhed af selvinduktion (henry).



Figur 21 - To spoler kobler induktivt gennem den gensidige induktans M .

Et system bestående af to spoler vil have en magnetisk flux med bidrag fra begge spoler. Spole 1 bærer strømmen I_1 og det giver et magnetiske flux-vindingstal på $L_1 I_1$. Spole 2 bærer strømmen I_2 og indvirkningen på spole 1 er givet af den gensidige induktion som flux-vindingstallet $M_{1,2} I_2$ ved spole 1. Efter superpositionsprincippet er flux-vindingstallet for spole 1 givet ved summen af de to bidrag. Noget ganske tilsvarende gælder for spole 2 så ligningssystemet bliver:

$$\begin{aligned} N_1 \Phi_1 &= L_1 I_1 + M_{1,2} I_2 \\ N_2 \Phi_2 &= L_2 I_2 + M_{2,1} I_1 \end{aligned}$$

Den gensidige induktion kan bestemmes ved at sætte strømmen i den ene af spolerne til nul og løse ligningssystemet. Her sættes $I_2 = 0$ for beregning af $M_{2,1}$ hvor strømmen er I_1 .

$$\begin{aligned} I_1 \neq 0 &\Rightarrow N_1 \Phi_1 = L_1 I_1, \quad \text{For } \Phi_1 = \Phi_2 \Rightarrow \frac{M_{2,1}}{N_2} = \frac{L_1}{N_1} \Rightarrow M_{2,1} = \frac{N_2}{N_1} L_1 \\ I_2 = 0 &\Rightarrow N_2 \Phi_2 = M_{2,1} I_1 \end{aligned}$$

Spolerne antages at have samme diameter $d_1 = d_2 = d$ og selvinduktionen L_1 kan bestemmes fra formlen L_{K0} for en spole med N_1 vindinger og tråddykkelsen t , hvor udtrykket nedenfor medtager den interne induktion fra den tråd vindingen er dannet af (det vil sige $L_1 + L_{K0}$ fra første side).

$$M_{2,1} = \frac{N_2}{N_1} \frac{\mu_0 N_1^2 d}{2} \ln\left(\frac{1,38 d}{t}\right) = \frac{\mu_0 N_1 N_2 d}{2} \ln\left(\frac{1,38 d}{t}\right)$$

Ligningen minder om formlen L_{K0} , men i stedet for kvadratet på vindingstallet står der $N_1 N_2$ og det udnyttes til simpel omskrivning af udtrykket. Et led kan skrives som kvadratroden af kvadratet på

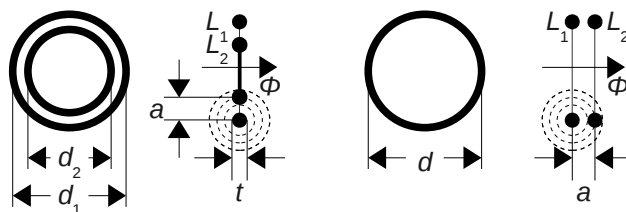
leddet, hvilket "fordobler" alle led, så der bliver to magnetiske konstanter μ_0 , der kan fordeles mellem to de udtryk, og så videre. Resultatet bliver at udtrykket kan skrives som produktet af to selvinduktioner, en for L_1 og en anden for L_2 .

$$M_{2,1} = \sqrt{\frac{\mu_0 N_1^2 d}{2} \ln\left(\frac{1,38 d}{t}\right) \cdot \frac{\mu_0 N_2^2 d}{2} \ln\left(\frac{1,38 d}{t}\right)} \Rightarrow M_{2,1} = \sqrt{L_1 L_2}$$

Noget helt tilsvarende kan vises for $M_{1,2}$ ved at sætte $I_1 = 0$, så den gensidige induktion mellem to spoler er ikke følsom for retningen. Det falder udenfor denne artikels rammer at føre et egentlig bevis for at relationen også gælder ved forskellig diameter af spolerne, så argumentationen vil i det følgende blive betragtet som et tilstrækkeligt grundlag til at gå videre.

Koblingsfaktor

Det blev forudsat at den magnetiske flux fra den ene spole løb fuldt og helt igennem den anden spole, men det er ikke realistisk på grund af spredningen af det magnetiske felt. Derfor indføres en *koblingsfaktor* k , som beskriver hvor meget den gensidige induktion bliver reduceret i forhold til den ideelle værdi [1-155]. Den fysiske begrundelse findes ved Amperes lov, der viser at den magnetiske flux løber i lukkede baner omkring lederen, hvilket er illustreret i figuren herunder ved de stiplede cirkler omkring lederen i spole 1. Ikke alle lukkede baner om spole 1 kan nå igennem planet for spole 2, som derved ikke gennemløbes af hele feltet fra spole 1, men kun en del af det, og koblingen mellem spolerne bliver mindsket i forhold til det teoretisk mulige.



Figur 22 – En spole med to vindinger i samme plan (venstre) eller forskudt aksialt (højre). Den magnetiske flux har en stor værdi tæt på lederen, men ikke hele feltet kobles over.

Den ideelle værdi af den gensidige induktion (kvadratroden af $L_1 L_2$) bliver derfor reduceret med koblingsfaktoren k , og talværdien er højest 1, for ellers ville energien ikke være bevaret. Den laveste værdi er kun nul hvis spolerne står vinkelret på hinanden eller spolerne er uendeligt langt fra hinanden.

$$M = k \sqrt{L_1 L_2}, \quad 0 \leq k \leq 1$$

Fra ligningssystemet med to vindinger kan et udtryk for koblingsfaktoren bestemmes. Strømmen i spole 2 sættes til nul for beregning af den magnetiske flux i spole 2 som følge af den magnetiske kobling fra spole 1. Det giver et system hvor den magnetiske flux Φ_1 i spole 1 er givet af spolens selvinduktion og strømmen i den, mens den magnetiske flux Φ_2 i spole 2 er givet ved den gensidige induktion mellem spolerne og strømmen i spole 1.

$$\begin{aligned} I_1 \neq 0 &\Rightarrow \Phi_1 = L_1 I_1 &\Rightarrow \frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{M}{L_1} = \frac{k \sqrt{L_1 L_2}}{L_1} = k \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \\ I_2 = 0 &\Phi_2 = M I_1 \end{aligned}$$

Ligningen kan alt efter behov løses enten for den gensidige induktion eller for koblingsfaktoren. Desuden kan indices ombyttes uden at det påvirker værdien af M eller k .

$$M = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} L_1 \quad \text{eller} \quad M = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} L_2 \quad \text{og tilsvarende} \quad k = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad \text{eller} \quad k = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

For den enkelte vinding i en spole er selvinduktionen givet ved L_{K0} så koblingsfaktoren mellem to vindinger kan skrives på følgende form, hvor koblingsfaktoren beregnes ud fra kendskab til den magnetiske flux i de to vindinger, der beskrives ved diameter d_1 og d_2 og trådens tykkelse t . Udtrykket vil blive benyttet i det efterfølgende kapitel for beregning af selvinduktion.

$$L_{K0} = \frac{\mu_0 d}{2} \ln\left(\frac{1,38 d}{t}\right) \Rightarrow k = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \sqrt{\frac{d_1 \ln(1,38 d_1/t)}{d_2 \ln(1,38 d_2/t)}} \text{ for } I_2 = 0$$

Jeg har ikke set noget der ligner denne formel i den litteratur jeg kender, men det er nødvendigt med en form for korrektion for at kunne ombytte vindingerne og opnå samme gensidige induktion.

Spole med to vindinger

Med vindingerne i serie bærer de den samme strøm ($I_1 = I_2 = I$). Det magnetiske flux-vindingstal beregnes for $N_1 = N_2 = 1$ og den samlede magnetiske flux er givet ved at addere de to ligninger.

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= (L_1 + M)I \\ \Phi_2 &= (L_2 + M)I \end{aligned} \Rightarrow \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = (L_1 + L_2 + 2M)I = (L_1 + L_2 + 2k\sqrt{L_1 L_2})I$$

Selvinduktionen af de to serieforbundne vindinger beregnes som vist på side 17 ved division med strømmen og hvis de to vindinger er helt ens ($L_1 = L_2$) så er $M = L_1$ og den resulterende selvinduktion af de to spoler bliver en faktor $2 + 2k$ gange med selvinduktionen af den enkelte vinding, som vist til venstre herunder. Resultatet bør sammenlignes med formlen fra introduktionen side 7, der vises til i midten ($N = 2$) og som nu tillader beregning af korrektionsfaktoren.

$$L = \frac{\Phi}{I} = (2 + 2k)L_1 \text{ versus } L = K \mu_0 d N^2 \Rightarrow K = \frac{2 + 2k}{4} \text{ for } N = 2$$

Ved perfekt kobling er $k = 1$ og det giver $L = 4L_1$, svarende til forventningen til en spole med to vindinger ($2^2 = 4$ og $K = 1$). En mere realistisk værdi af koblingsfaktoren er cirka $k \approx 0,8$ hvilket giver en selvinduktion på $L = 3,6L_1$ eller 10 % under det ideelle ($K = 0,9$). Det er derfor en tilnærmelse når alle formler indeholder leddet N^2 og det forhold reflekteres så i korrektionsfaktoren.

Spole med mange vindinger

Resultaterne kan generaliseres til en algoritme for beregning af selvinduktionen for en cylindrisk spole med både længde og tykkelse af beviklingen. Spolen består af ret mange vindinger, så der skal opstilles et stort antal ligninger for at beskrive den, men der er et system i ligningerne, som simplificerer algoritmen til noget, der kan løses ved hjælp af en computer.

Flux-vindingstallene for en spole med fire vindinger vises nedenfor med selvinduktionen for den enkelte vinding som L_1, L_2, L_3 og L_4 og koblingsfaktoren som k_{rs} hvor r og s angiver de enkelte par af vindinger i beviklingen.

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= (L_1 + k_{12}\sqrt{L_1 L_2} + k_{13}\sqrt{L_1 L_3} + k_{14}\sqrt{L_1 L_4})I \\ \Phi_2 &= (k_{21}\sqrt{L_2 L_1} + L_2 + k_{23}\sqrt{L_2 L_3} + k_{24}\sqrt{L_2 L_4})I \\ \Phi_3 &= (k_{31}\sqrt{L_3 L_1} + k_{32}\sqrt{L_3 L_2} + L_3 + k_{34}\sqrt{L_3 L_4})I \\ \Phi_4 &= (k_{41}\sqrt{L_4 L_1} + k_{42}\sqrt{L_4 L_2} + k_{43}\sqrt{L_4 L_3} + L_4)I \end{aligned}$$

Selvinduktionen for spolen kaldes L_G hvor index G står for *General*. Selvinduktionen beregnes ved at dividere den samlede magnetiske flux med strømmen (se side 17). Selvinduktionen L_n af vinding n er givet ved dens diameter d_n og trådtykkelsen t efter formlen L_{K0} , som benyttes såvel

for den enkelte vinding L_n (det vil sige L_1, L_2, L_3 og L_4 i ligningssystemet ovenfor) som for L_r og L_s i udtrykkene for gensidig induktion (det vil sige alle par af vindinger som for eksempel L_1L_2)

$$L_G = \frac{\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4}{I} \quad \text{og} \quad L_n = \frac{\mu_0 d_n}{2} \ln\left(\frac{1,38 d_n}{t}\right)$$

Leddene fra ligningssystemet indsættes og arrangeres i stigende orden for indices.

$$L_G = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + k_{12}\sqrt{L_1L_2} + k_{13}\sqrt{L_1L_3} + k_{14}\sqrt{L_1L_4} \\ + k_{21}\sqrt{L_2L_1} + k_{23}\sqrt{L_2L_3} + k_{24}\sqrt{L_2L_4} + k_{31}\sqrt{L_3L_1} + \dots$$

Indices kan ombyttes, eksempelvis kan k_{12} og k_{21} begge repræsenteres af k_{12} og tilsvarende kan indices ombyttes i kvadratroden.

$$L_G = L_1 + \dots + L_4 + 2[k_{12}\sqrt{L_1L_2} + k_{13}\sqrt{L_1L_3} + k_{14}\sqrt{L_1L_4} + k_{23}\sqrt{L_2L_3} + \dots + k_{34}\sqrt{L_3L_4}]$$

Det kan skrives som to summer og generaliseres til at gælde for en spole med N vindinger. Den første sum samler selvinduktionen for de enkelte vindinger og dobbelt-summen tilføjer bidragene af gensidig induktion for alle par af vindinger, hvor det bemærkes at index r løber fra 1 til $N - 1$ og index s løber fra $r + 1$ til N .

$$L_G = \sum_{n=1}^N L_n + 2 \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{s=r+1}^N k_{rs} \sqrt{L_r L_s}, \quad N \geq 2$$

Opgaven er nu at bestemme koblingsfaktoren mellem vindingerne så spolens K kan beregnes. Koblingsfaktoren bestemmes først for en skivespole, hvor beviklingen ligger som en spiral i et plan, og derefter udvides metoden for en mere generel spole med både en længde og tykkelse.

Tætliggende vindinger skal analyseres separat, fordi det med nogen rimelighed kan antages at koblingsfaktoren mellem vindingerne er $k \approx 0,8$ som det vises i det følgende afsnit. Hvis det dertil antages at alle vindinger er ens, vil vindingernes selvinduktion være ens og kan beskrives ved L_{K0} fra første side. Selvinduktionen af spolen er følgelig KN^2L_{K0} hvor K afhænger af hvor godt de N vindinger kobler med hinanden. Fra det ovenstående ligningssystem sættes selvinduktionen udenfor en parentes som en fælles faktor og konstanten K beregnes.

$$L_n = L_r = L_s \Rightarrow L_G = K \frac{\mu_0 d N^2}{2} \ln\left(\frac{1,38 d}{t}\right), \quad K = \frac{1}{N^2} \left(\sum_{n=1}^N 1 + 2 \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{s=r+1}^N k \right)$$

Sidste kolonne angiver den resulterende værdi af K for $k = 0,8$ og det ses at værdien falder langsomt med en gennemsnitlig værdi på $0,85$ for et relativt lavt antal vindinger.

$N = 2$	$r = 1$	$s = 2$	$2 + 2k$	\Rightarrow	$K = \frac{\Sigma}{N^2} =$	$0,900$
$N = 3$	$\Rightarrow r = 1..2$	$s = 2, 3, 3$	$\Rightarrow 3 + 6k$	\Rightarrow	$K = \frac{\Sigma}{N^2} =$	$0,878$
$N = 4$	$r = 1..3$	$s = 2..4, 3..4, 4$	$\Rightarrow 4 + 12k$			$0,850$
$N = 5$	$r = 1..4$	$s = 2..5, 3..5, 4..5, 5$	$\Rightarrow 5 + 20k$			$0,840$

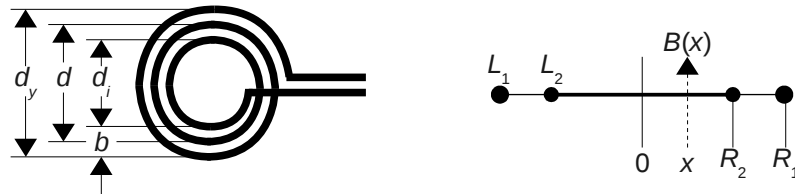
Følgelig bliver formlen for en spole med nogle få og tætsiddende vindinger:

$$L = 0,85 \frac{\mu_0 d N^2}{2} \ln\left(\frac{1,38 d}{t}\right)$$

Prøves formlen på spolen på side 9 med $d = 0,180$ m, $t = 1,5$ mm og $N = 4$ findes $L = 7,86$ μH , der er mindre end 1 % fra den målte værdi. Det er en nøjagtighed der ikke kan garanteres generelt.

To vindinger i samme plan

En typisk spole for moderne højfrekvensteknik dannes direkte på en printplade og vindingerne ligger derfor i et plan. Den beskrives i denne artikel ved den ydre diameter d_y , den indre d_i og med b som tykkelsen af beviklingen. Der regnes fra centrum til centrum af tråden, så den totale ydre diameter er $D_y = d_y + t$, hvor t er tråddykkelsen, og tilsvarende er den indre diameter $D_i = d_i - t$. Vindingerne vil blive opfattet som koncentriske, cirkelformede spoler hvilket selvfølgelig er en tilnærmelse og der tages ikke hensyn til at tråden ikke er cirkulær.



Figur 23 - En skivespole har vindingerne liggende som en spiral i et plan.

I den følgende analyse betegner vinding 1 den største at to vindinger i planet, som drives med en strømstyrke på I_1 , og den magnetiske flux Φ_1 fra vindingen udgør det maksimum af magnetisk flux, der kan overføres. Værdien beregnes ved brug af definitionen på selvinduktion fra side 17 med udgangspunkt i formelen L_{K0} fra afsnittet side 34 for en spole med kun en enkelt vinding.

$$\Phi_1 = \frac{L_{K0} I_1}{N} = \frac{\mu_0 d_1 I_1}{2} \ln\left(\frac{1,38 d_1}{t}\right)$$

Formlen inkluderer den interne magnetiske flux i lederen så værdien gælder ved lave frekvenser, og ved høje frekvenser erstattes faktor 1,38 med 1,07 på grund af strømfortrængningen.

Den magnetiske fluxtæthed vil give anledning til en magnetisk flux Φ_2 i vinding 2 i spolens plan, og fluxen beregnes ved at integrere fra centrum til overfladen af tråden ($R_2 - t/2$), hvor R_2 er radius af vinding 2, og arealet dA , der integreres over er et smalt, cirkulært bånd med en bredde på dx og en længde lig med omkredsen på $2\pi x$.

$$\Phi_2 = \int_0^{R_2-t/2} B_K dA = \int_0^{R_2-t/2} \left(\frac{\pi-1}{\pi} \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} + \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(R_1-x)} \right) 2\pi x dx$$

Den variable substitueres med $x = R_1\beta$, som medfører at $dx = R_1 d\beta$ og derfor er $x dx = R_1^2 \beta d\beta$. Den øvre grænse normeres ligeledes med R_1 til $R_2/R_1 - t/2R_1$.

$$\Phi_2 = \int_0^{R_2/R_1-t/2R_1} \left(\frac{\pi-1}{\pi} \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} + \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R_1(1-\beta)} \right) 2\pi R_1^2 \beta d\beta$$

Begge leds nævnere indeholder $2\pi R_1$, som efter forkortning efterlader R_1 i tælleren, der sammen med μ_0 sættes udenfor som en fælles faktor.

$$\Phi_2 = \mu_0 R_1 I_1 \left((\pi-1) \int_0^{R_2/R_1-t/2R_1} \beta d\beta + \int_0^{R_2/R_1-t/2R_1} \frac{\beta d\beta}{1-\beta} \right)$$

De to integraler bestemmes ved tabelopslag [4-153, 5-57,60].

$$\Phi_2 = \mu_0 R_1 I_1 \left((\pi-1) \left[\frac{\beta^2}{2} \right]_0^{R_2/R_1-t/2R_1} + [-\beta - \ln(1-\beta)]_0^{R_2/R_1-t/2R_1} \right)$$

Kun øverste grænse giver et bidrag.

$$\Phi_2 = \mu_0 R_1 I_1 \left(\frac{\pi-1}{2} \left(\frac{R_2}{R_1} - \frac{t}{2R_1} \right)^2 - \left(\frac{R_2}{R_1} - \frac{t}{2R_1} \right) - \ln \left(1 - \frac{R_2}{R_1} + \frac{t}{2R_1} \right) \right)$$

De to første led kan simplificeres ved at antage at trådtykkelsen er lille i forhold til R_1 og R_2 , men nøjagtigheden vil blive markant forværret for en betydende forskel mellem de to vindingers radier. Fortegnet til logaritmen fjernes ved at invertere argumentet og leddene sættes på samme brøk. Det udnyttes at diameteren er $d = 2R$ for at give det resulterende udtryk.

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 d_1 I_1}{2} \left(\frac{\pi-1}{2} \left(\frac{d_2}{d_1} - \frac{t}{d_1} \right)^2 - \left(\frac{d_2}{d_1} - \frac{t}{d_1} \right) + \ln \left(\frac{d_1}{d_1 - d_2 + t} \right) \right)$$

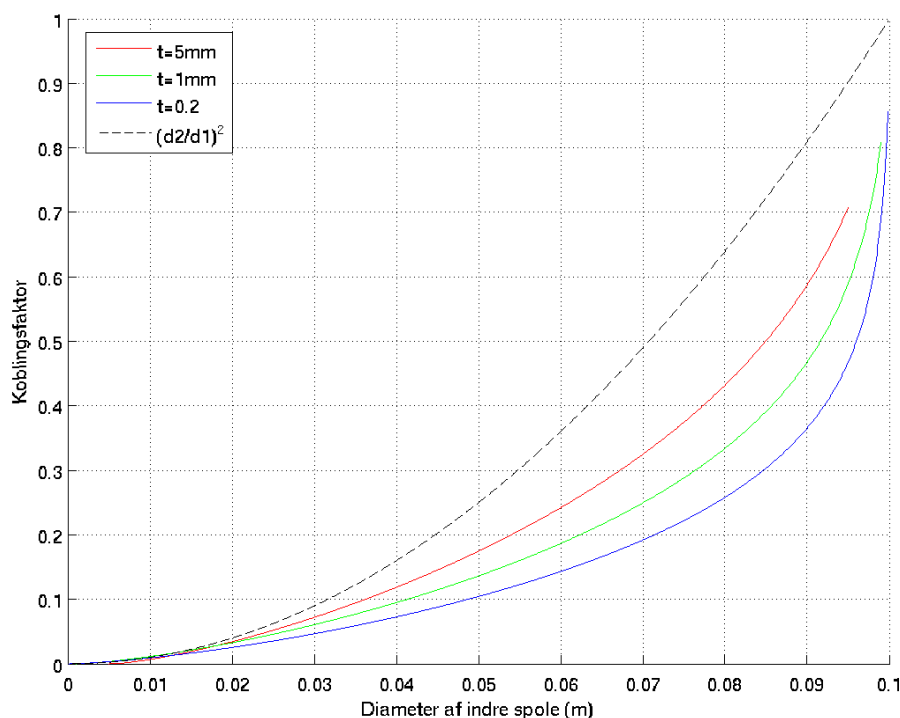
Koblingsfaktoren mellem to spoler i samme plan kan nu opskrives ved indsættelse i udtrykket fra side 37.

$$k_1 = \frac{\frac{\mu_0 d_1 I_1}{2} \left(\frac{\pi-1}{2} \left(\frac{d_2}{d_1} - \frac{t}{d_1} \right)^2 - \left(\frac{d_2}{d_1} - \frac{t}{d_1} \right) + \ln \left(\frac{d_1}{d_1 - d_2 + t} \right) \right)}{\frac{\mu_0 d_1 I_1}{2} \ln \left(\frac{1,38 d_1}{t} \right)} \sqrt{\frac{d_1 \ln \left(\frac{1,38 d_1}{t} \right)}{d_2 \ln \left(\frac{1,38 d_2}{t} \right)}}$$

Den fælles faktor $\mu_0 d_1 I_1 / 2$ forkortes væk og det udnyttes at første ledes nævner er lig med kvadrattrodens tæller (på nær d_1) hvorved udtrykket kan reduceres til det følgende.

$$k_1 = \frac{\frac{\pi-1}{2} \left(\frac{d_2}{d_1} - \frac{t}{d_1} \right)^2 - \left(\frac{d_2}{d_1} - \frac{t}{d_1} \right) + \ln \left(\frac{d_1}{d_1 - d_2 + t} \right)}{\sqrt{\ln \left(\frac{1,38 d_1}{t} \right) \ln \left(\frac{1,38 d_2}{t} \right)}} \sqrt{\frac{d_1}{d_2}}$$

Resultatet hører ikke til de simpleste, men det opfører sig pænt, som det ses af figuren herunder, hvor koblingsfaktoren går asymptotisk mod én når den indre vindinges diameter går imod den ydre vindinges diameter.



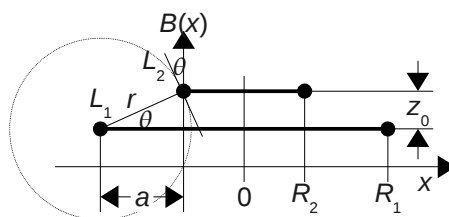
Figur 24 – Den ydre vindinges diameter er fast ($d_1 = 100$ mm) og koblingsfaktoren vises for den indre vindinges diameter i intervallet fra én trådtykkelse og op til én trådtykkelse fra den ydre vindinges diameter. Selve trådens diameter er holdt som parameter med tre værdier. Til sammenligning vises relationen for forholdet mellem spolernes arealer (stiplet); en model, der kun er anvendelig ved meget stor forskel imellem vindingernes diameter.

For en indre diameter blot én trådtykkelse mindre end den ydre diameter, er koblingsfaktoren så lav som $k = 0,86$ selv ved en trådtykkelse på blot 0,2 % af diameteren af vindingen ($d_1 = 100$ mm og $t = 0,2$ mm), og endnu lavere for større trådtykkelse; så det er nærmest umuligt at opnå en så perfekt kobling at N^2 kan forsvares i formlerne, og det har stor betydning for spoler med ganske få vindinger.

Som et eksempel vises beregning af selvinduktionen ved brug af formlen L_{K0} for en spole med én eller to vindinger. Korrektionsfaktoren er $K = \frac{1}{2} \ln(1,38d/t)$ og tykkelsen af beviklingen (længden af spolen) sættes til $2t$ for en spole med to vindinger og til t for en spole med en enkelt vinding. Korrektionsfaktoren bliver $K_2 = 2,117$ for spolen med to vindinger ($d/t = 50$) og $K_1 = 2,464$ for en spole med én vinding ($d/t = 100$). Forholdet er $K_2/K_1 = 0,86$, hvilket kun er 5 % fra den beregnede korrektionsfaktor efter side 38 ($K = 0,91$ ved $k = 0,81$ for $d_1 = 100$ mm og $t = 1$ mm).

To vindinger i lille afstand (under revision)

To vindinger med radius R_1 og R_2 , og med planerne forskudt med afstanden z_0 kobler stort set på samme måde som vindingerne fra skivespolen, dog skal der tages hensyn til feltets krumning idet feltlinjerne ikke går vinkelret igennem planet for vinding 2. I figuren betegner L_1 selvinduktionen af den vinding, der gennemløbes af strømmen I_1 og producerer en magnetisk flux på ϕ_1 , som kun partielt gennemløber vindingen L_2 .



Figur 25 - Beregning af hvor meget af den magnetiske flux fra spole 1, der løber gennem planet for spole 2. Det cirkulære magnetiske felt er illustreret med stiplede linjer.

Det forudsættes at afstanden er så kort at den magnetiske fluxtæthed fra lederen (B_1 fra Amperes lov) dominerer over værdien i centrum (B_C fra Biot & Savarts lov), og at koblingen derfor primært er relateret til feltstyrken tæt på lederen. Afstanden mellem de to ledere skal være mindre end cirka 1/3 af radius.

$$B_1 > B_C \Rightarrow \frac{\mu_0 I}{2\pi r} > \frac{\mu_0 I}{2R} \Rightarrow \pi r < R \Rightarrow r < \frac{R}{\pi}$$

Afstanden mellem lederne beregnes efter Pythagoras.

$$r = \sqrt{a^2 + z_0^2}, \quad a = \frac{d_1 - d_2}{2}$$

For at kunne benytte værktøjet skal vinding 2 projiceres ned på planet med en diameter justeret efter forskydningen og denne projektion kaldes $d_2^{(2)}$. For to vindinger i planen er der afstanden a imellem de to periferier, så $d_1 = d_2 + 2a$, og noget tilsvarende må gælde for projektionen, med den forskel at afstanden nu er givet ved udtrykket for r .

$$d_1 = d_2^{(2)} + 2r \Rightarrow d_2^{(2)} = d_1 - 2r$$

Udtrykket for $d_2^{(2)}$ kommer derfor til at indeholde d_1 , d_2 og z_0 , der alle er kendte størrelser.

$$d_2^{(2)} = d_1 - 2\sqrt{\left(\frac{d_1 - d_2}{2}\right)^2 + z_0^2}$$

Udtrykket indsættes i k_1 i stedet for d_2 for derved at give et kvalificeret bud på koblingsfaktoren for en lille forskydning mellem de to vindinger.

$$k_2 = \frac{\frac{\pi-1}{2} \left(\frac{d_2^{(2)}}{d_1} - \frac{t}{d_1}\right)^2 - \left(\frac{d_2^{(2)}}{d_1} - \frac{t}{d_1}\right) + \ln\left(\frac{d_1}{d_1 - d_2^{(2)} + t}\right)}{\sqrt{\ln\left(\frac{1,38 d_1}{t}\right) \ln\left(\frac{1,38 d_2^{(2)}}{t}\right)}} \sqrt{\frac{d_1}{d_2^{(2)}}}$$

--- Hertil ---

Det magnetiske felt tæt på lederen i vinding 1 regnes for cirkulært og krydser planet for vinding 2 i afstanden a fra centrum af tråden i spole 1 og i højden z_0 over planet for vinding 1 så længden af radius vektor r er givet ved Pythagoras. Amplituden af feltet er derefter givet ved B_1 fra Amperes lov (side 19), og retningen er givet ved tangenten til feltet hvor det krydser gennem planet for vinding 2, og det er den samme vinkel som mellem radius vektor r og planet for vinding 1. Projektionen af feltet ind på normalen til vindingens plan er amplituden gange med cosinus til vinklen, som er givet ved formlen for en retvinklet trekant [4-68]. Endelig er afstanden a givet ved den horizon-

tale afstand fra lederen, og med $x = 0$ i centrum af vindingerne og R_1 som radius af i vinding 1, bliver udtrykket afstanden en differens derimellem. Den magnetiske fluxtæthed projiceret ind på den lodrette z-akse fra feltet omkring lederen bliver derfor givet af følgende udtryk.

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \cos(\theta) \quad \text{hvor} \quad \begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + z_0^2} \\ a &= r \cos(\theta) \end{aligned} \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + z_0^2}} \quad \text{og} \quad a = R_1 - x$$

Med brug af kombinationsudtrykket B_K fra afsnittet om den simple spole (side 31) bliver et rimeligt bud på den magnetiske fluxtæthed projiceret ind på z-aksen derfor: B_z gange cosinus til vinklen.

$$B_z = \left(\frac{\pi - 1}{\pi} \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} + \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \right) \cos(\theta) = \mu_0 I_1 \left(\frac{\pi - 1}{2\pi R_1} \frac{a}{\sqrt{a^2 + z_0^2}} + \frac{1}{2\pi \sqrt{a^2 + z_0^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 + z_0^2}} \right)$$

Med a indsat findes feltets komponent i z-aksens retning til et udtryk med parametrene I_1 , R_1 og z_0 .

$$B_z = \mu_0 I_1 \left(\frac{\pi - 1}{2\pi R_1} \frac{R_1 - x}{\sqrt{(R_1 - x)^2 + z_0^2}} + \frac{R_1 - x}{2\pi ((R_1 - x)^2 + z_0^2)} \right)$$

Den fælles divisor 2π sættes udenfor, parenteserne ganges ud og udtrykket normeres med R_1 , der også sættes udenfor. Den normerede variable x og parameter z_0 substitueres med henholdsvis β og γ_0 . Den nye variable β går fra 0 ved centrum af vindingen til 1 ved centrum af vinding 1, og parameteren γ_0 er nul eller en lille, positiv værdi.

$$B_z = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R_1} \left((\pi - 1) \frac{1 - \beta}{\sqrt{\beta^2 - 2\beta + 1 + \gamma_0^2}} + \frac{1 - \beta}{\beta^2 - 2\beta + 1 + \gamma_0^2} \right), \quad \begin{aligned} x &= R_1 \beta, & 0 \leq \beta \leq 1 \\ z_0 &= R_1 \gamma_0, & 0 \leq \gamma_0 \ll 1 \end{aligned}$$

Der integreres fra centrum af vindingen ($\beta = 0$) til centrum af tråden for vindingen ($\beta = R_2/R_1$). Som før benyttes et smalt, cirkulært bånd i afstanden β fra centrum, så arealet af båndet er givet ved omkredsen $2\pi x$ gange bredden dx og bliver derfor til $dA = 2\pi R_1^2 \beta d\beta$. Den magnetiske flux, der flyder igennem vinding 2 beregnes ved integration af følgende udtryk, der svarer til fire integraler.

$$\Phi_2 = \int_0^{R_2/R_1} B_z 2\pi R_1^2 \beta d\beta$$

Definitionen af B_z indsættes i udtrykket for Φ_2 .

$$\Phi_2 = \mu_0 R_1 I_1 \left[(\pi - 1) \left(\int_0^{R_2/R_1} \frac{\beta d\beta}{\sqrt{P}} - \int_0^{R_2/R_1} \frac{\beta^2 d\beta}{\sqrt{P}} \right) + \int_0^{R_2/R_1} \frac{\beta d\beta}{P} - \int_0^{R_2/R_1} \frac{\beta^2 d\beta}{P} \right]$$

hvor $P = \beta^2 - 2\beta + 1 + \gamma_0^2$

Integralerne løses enkeltvist med brug af et tabelværk [4-164].

Tabelværket benytter polynomiet $P = ax^2 + bx + c$, hvor $a = 1$, $b = -2$ og $c = 1 + \gamma_0^2$. Løsningen er afhængig af relationen mellem parametrene $4ac = 4(1 + \gamma_0^2)$ og $b^2 = 4$. Det er forudsat at afstanden mellem vindingerne er lille, det vil sige at γ_0 er nær nul, og derfor skal løsningen egentlig vælges for $4ac > b^2$, men det giver division med nul for $z_0 = 0$, så derfor vælges at benytte den løsning, der forudsætter $4ac = b^2$, hvilket strengt taget begrænser løsningen til $z_0 = 0$. Det antages med andre ord, at løsningen er kontinuert hen over $z_0 = 0$, og har samme tangent fra hver side; men det er et forhold, som ikke eftervises her. Det står dog fast at løsningen er korrekt for $z_0 = 0$ og for alle x .

De enkelte integraler noteres her med $S_2^{(1)}$ for det første integral, $S_2^{(2)}$ for det andet, og så fremdeles. Som det fremgår er der mange ens led i løsningsmængden.

$$S_2^1 = \left[\sqrt{P} + \ln(2\beta - 2 + 2\sqrt{P}) \right]_0^{R_2/R_1}$$

$$S_2^2 = \left[\frac{\beta\sqrt{P}}{2} + \frac{6}{4}(\sqrt{P} + \ln(2\beta - 2 + 2\sqrt{P})) - \frac{1+\gamma_0^2}{2} \ln(2\beta - 2 + 2\sqrt{P}) \right]_0^{R_2/R_1}$$

$$S_2^3 = \left[\frac{1}{2} \ln(P) - \frac{2}{2\beta - 2} \right]_0^{R_2/R_1}$$

$$S_2^4 = \left[\beta + 2 \left(\frac{1}{2} \ln(P) - \frac{2}{2\beta - 2} \right) + (1 + \gamma_0^2) \frac{2}{2\beta - 2} \right]_0^{R_2/R_1}$$

For $\beta = R_2/R_1$ og $z_0 = 0$ er værdien af polynomiet jævnt aftagende fra $P(0) = 1$ til $P(1) = 0$ hvor der er vandret tangent, og den forskydes opad for $z_0 > 0$. For $\beta = 0$ er værdien én plus kvadratet på z_0/R_1 , så konklusionen er at polynomiet aldrig bliver negativt. For at reducere skrivearbejdet vil de to grænseværdier blive betegnet P_1 for øvre grænse og P_0 for nederste grænse.

$$\beta = R_2/R_1: P_1 = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 2\frac{R_2}{R_1} + 1 + \gamma_0^2 \quad \text{og} \quad \beta = 0: P_0 = 1 + \gamma_0^2$$

Grænserne indsættes.

$$S_2^1 = \left[\sqrt{P_1} + \ln\left(2\frac{R_2}{R_1} - 2 + 2\sqrt{P_1}\right) \right] - \left[\sqrt{P_0} + \ln(-2 + 2\sqrt{P_0}) \right]$$

$$S_2^1 = \sqrt{P_1} - \sqrt{P_0} + \ln\left(2\frac{R_2}{R_1} - 2 + 2\sqrt{P_0}\right) - \ln(-2 + 2\sqrt{P_0})$$

$$S_2^2 = \left[\frac{\beta\sqrt{P}}{2} + \frac{3}{2}(\sqrt{P} + \ln(2\beta - 2 + 2\sqrt{P})) - \frac{1+\gamma_0^2}{2} \ln(2\beta - 2 + 2\sqrt{P}) \right]_0^{R_2/R_1}$$

$$S_2^3 = \left[\frac{1}{2} \ln(P) - \frac{2}{2\beta - 2} \right]_0^{R_2/R_1}$$

$$S_2^4 = \left[\beta + 2 \left(\frac{1}{2} \ln(P) - \frac{2}{2\beta - 2} \right) + (1 + \gamma_0^2) \frac{2}{2\beta - 2} \right]_0^{R_2/R_1}$$

--- **Hertil** ---

Vinding 2 har diameter d_2 så der integreres fra trådens overflade ved $x = t/2 + a$ til den modsatte side ved $d_2 + a$ hvor a er afstanden mellem vindingerne ($2a = d_1 - d_2$ og $d_1 > d_2$). Den magnetiske flux beregnes ved at opfatte lederen som en ret leder med længden πd_2 , og integrationen benytter et smalt bånd med arealet $dA = \pi d_2 dx$.

$$\Phi_2 = \int_{t/2+a}^{a+d_2} B_1 \cos(\theta) dA = \int_{t/2+a}^{a+d_2} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \sqrt{x^2 + z_0^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + z_0^2}} \pi d_2 dx$$

Leddene samles og integralet bestemmes ved hjælp af et tabelværk [4-157, 5-64].

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 d_2 I_1}{2} \int_{t/2+a}^{a+d_2} \frac{x dx}{x^2+z_0^2} = \frac{\mu_0 d_2 I_1}{2} \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+z_0^2) \right]_{t/2+a}^{a+d_2} = \frac{\mu_0 d_2 I_1}{4} \ln\left(\frac{(a+d_2)^2+z_0^2}{(t/2+a)^2+z_0^2}\right)$$

Afstanden a mellem vindingerne substitueres med vindingernes diameter og ligningen multipliceres med 4 i tæller og nævner for at fjerne divisionen med 2.

$$a = \frac{d_1-d_2}{2} \Rightarrow \Phi_2 = \frac{\mu_0 d_2 I_1}{4} \ln\left(\frac{\left(\frac{d_1+d_2}{2}\right)^2+z_0^2}{\left(\frac{t}{2}+\frac{d_1-d_2}{2}\right)^2+z_0^2}\right) = \frac{\mu_0 d_2 I_1}{4} \ln\left(\frac{(d_1+d_2)^2+4z_0^2}{(t+d_1-d_2)^2+4z_0^2}\right)$$

Koblingsfaktoren beregnes af udtrykket fra side 37, hvor det forudsættes at frekvensen er så høj at udtrykket med $\ln(2d/t)$ kan benyttes for at simplificere reduktionen; det svarer til en frekvens på mindst 20 kHz. Den magnetiske flux gennem vinding 1 beregnes efter side 40 og det forudsættes at de to spoler har samme trådtykkelse. Udtrykkene for de magnetiske flux indsættes og der multipliceres med 2 i tæller og nævner hvilket efterlader faktor $\frac{1}{2}$ i tælleren.

$$k_2 = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \sqrt{\frac{d_1 \ln(2d_1/t)}{d_2 \ln(2d_2/t)}} = \frac{\frac{\mu_0 d_2 I_1}{2} \ln\left(\frac{(d_1+d_2)^2+4z_0^2}{(t+d_1-d_2)^2+4z_0^2}\right)}{\mu_0 d_1 I_1 \ln\left(\frac{2d_1}{t}\right)} \sqrt{\frac{d_1 \ln\left(\frac{2d_1}{t}\right)}{d_2 \ln\left(\frac{2d_2}{t}\right)}}$$

De fælles led med $\mu_0 I_1$ divideres ud og det ses at nævneren i første brøk er identisk med tælleren i kvadratrodens brøk hvilket tillader en reduktion. Desuden udnyttes at $\ln(x^{1/2}) = (1/2) \ln(x)$ til at indføre en kvadratrod til logaritmens argument og samtidig fjerne faktor $\frac{1}{2}$ fra udtrykket.

$$k_2 = \sqrt{\frac{d_2}{d_1}} \frac{\ln \sqrt{\frac{(d_1+d_2)^2+4z_0^2}{(t+d_1-d_2)^2+4z_0^2}}}{\sqrt{\ln\left(\frac{2d_1}{t}\right) \ln\left(\frac{2d_2}{t}\right)}}, \quad \begin{array}{l} d_1 \geq d_2 \\ z_0 < d_2 \\ f > 20 \text{ kHz} \end{array}$$

For $z_0 = 0$ er udtrykket identisk med det tidligere fundne for to vindinger i samme plan. I specialtilfældet hvor spolerne er ens ($d_2 = d_1$) og afstanden er minimal ($z_0 = t$) er værdien af koblingsfaktoren maksimal med værdien $k_{max} = 0,85$ for $d_1 = 100t$. I afstanden $z_0 = d_1$ er $k = 0,065$, men det er ikke rimeligt at antage at det holder da z_0 ikke længere er lille i forhold til diameteren.

Udledningen forudsætter at feltet i lederen kan ignoreres. Hvis feltet tages i betragtning skal leddene med $\ln(2d/t)$ i nævnere erstattes med $\ln(2,43d/t)$ hvilket mindsker k_2 med 3,7 % for en spole med $d/t = 100$. Tilsvarende bliver faktoren til z_0^2 forøget fra $2^2 = 4$ til $(2,43)^2 = 5,9$ så leddene med $4z_0^2$ skal erstattes med $5,9z_0^2$, hvilket yderligere reducerer k med 3,5 % i afstanden $z_0 = t$.

Som vist i afsnittet om gensidig induktion er udtrykket gyldigt uanset hvilken vinding der bærer en strøm blot talværdierne indsættes med d_1 for den største diameter og d_2 for den mindste; det er givet af udledningerne på side 37 som tillader brug af den metode der er lettest at arbejde med.

To vindinger i stor afstand

Kravet om lille afstand mellem vindingerne kan ikke opfyldes for alle vindinger i en generel spole, så det er nødvendigt med et udtryk der er gyldigt ved stor afstand mellem vindingerne. En mulighed er at benytte udtrykket B_z (side 28) for den magnetiske fluxtæthed i afstanden z_0 fra planet af vinding 1 og beregne den magnetiske flux gennem vinding 2 ved at gange den magnetiske fluxtæt-

hed med vindingens areal. Derved antages det at den magnetiske fluxtæthed er konstant over arealet af vindingen og det er tilladeligt i stor afstand mellem vindingerne; det er dog ikke korrekt og tager ikke hensyn til feltets krumning, så resultatet må forventes at være i overkanten af det korrekte.

Arealet af vinding 2 er $A_2 = \pi d_2^2/4$ så den magnetiske flux gennem vindingen bliver:

$$\Phi_2 = B_z A_2 = \frac{\mu_0 I_1}{d_1} \frac{1}{(\sqrt{1+(2z_0/d_1)^2})^3} \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{\pi \mu_0 d_2^2 I_1}{4 d_1 (\sqrt{1+(2z_0/d_1)^2})^3}$$

Den magnetiske flux gennem vinding 1 beregnes efter side 40 og koblingsfaktoren bliver:

$$k_3 = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \sqrt{\frac{d_1 \ln(\frac{1,38 d_1}{t})}{d_2 \ln(\frac{1,38 d_2}{t})}} = \frac{\frac{\pi \mu_0 d_2^2 I_1}{4 d_1 (\sqrt{1+(2z_0/d_1)^2})^3} \sqrt{d_1 \ln(\frac{1,38 d_1}{t})}}{\frac{\mu_0 d_1 I_1}{2} \ln(\frac{1,38 d_1}{t})} \sqrt{\frac{d_1 \ln(\frac{1,38 d_1}{t})}{d_2 \ln(\frac{1,38 d_2}{t})}}$$

Leddene $\pi\mu_0 I_1/4$ og $\mu_0 I_1/2$ forkortes til en fast faktor på $\pi/2$. Leddet i nævneren er nu identisk med tælleren i kvadratroden og tillader derved en simplificering af udtrykket. Leddet $(d_2/d_1)^2$ ganges ind i kvadratroden af $d_1 d_2$ til kvadratroden af $(d_2/d_1)^3$.

$$k_3 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^3 \frac{1}{\left(\sqrt{1+\left(\frac{2z_0}{d_1}\right)^2}\right)^3} \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1,38 d_1}{t}\right) \ln\left(\frac{1,38 d_2}{t}\right)}}}, \quad z_0 > d_1$$

Værdien er $k_3 = 0,0285$ for $z_0 = d_1 = d_2 = 100t$ og er cirka halvdelen af resultatet fra det tidligere afsnit, som indikation af at den tidligere beregning kun er gyldig i kort afstand. Formlen er udledt fra en antagelse om stor afstand, så der tages ikke hensyn til feltets krumning ved planet for vinding 2 og værdien må derfor forventes at ligge i overkanten. Relationen skal kun benyttes som en øvre grænse for koblingsfaktoren, så forløbet ved små værdier af z_0 er ikke interessant og komplicerer en kombination af udtrykkene for k_2 og k_3 , så formelen simplificeres til det følgende udtryk, der er asymptotisk korrekt ved stor afstand mellem vindingerne.

$$k_3 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{d_1}{2z_0}\right)^3 \frac{\sqrt{(d_2/d_1)^3}}{\sqrt{\ln(1,38 d_1/t) \ln(1,38 d_2/t)}}, \quad z_0 > d_1$$

Som nævnt et par gange før skal leddene $\ln(1,38 d/t)$ erstattes med $\ln(1,07 d/t)$ ved høje frekvenser hvor det magnetiske felt inde i ledningen går imod nul på grund af strømfortrængning.

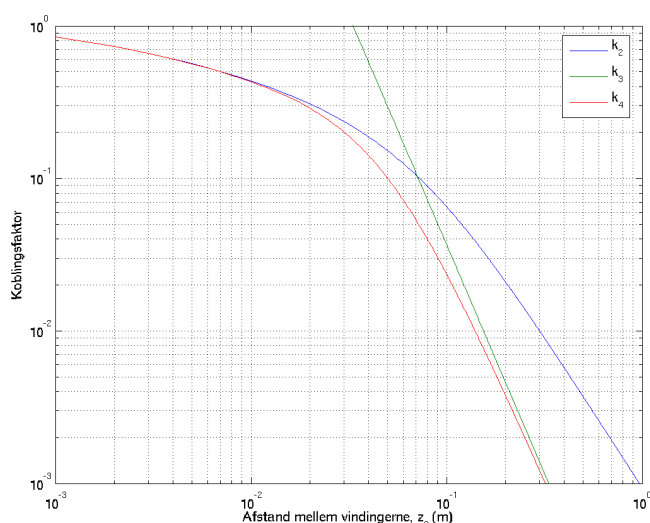
To vindinger i vilkårlig afstand (under revision)

Ved kort afstand mellem vindingerne er udtrykket for k_2 brugbart, men værdien aftager ikke med den krævede tredje orden for stor afstand hvorfor udtrykket for k_3 må tage over. For at få en blød overgang mellem udtrykkene benyttes en beregning der minder om modstande i parallel, idet den går imod k_2 for $k_2 \rightarrow 0$ og k_3 for $k_3 \rightarrow 0$, så den laveste værdi dominerer.

$$k_4 = \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3}$$

Note: Der savnes videnskabelig dokumentation for denne sammensætning af formler.

Resultatet vises i figuren nedenfor med en rød streg. Som det ses er k_2 dominerende op til en afstand på 10 % af diameteren ($z_0 = 10$ mm) og k_3 tager over ved 75 % af diameteren.



Figur 26 – Den resulterende koblingsfaktor for to vindinger som funktion af afstanden for en spole med to vindinger hvor $d_1 = d_2 = 100$ mm og $t = 1$ mm.

Koden vises nedenfor:

Diameteren af de to vindinger sættes til $d_1 = d_2 = 100$ mm og trådens tykkelse til $t = 1$ mm. Afstanden mellem vindingerne repræsenteres af en vektor for z_0 der har 1000 elementer fra t , det vil sige 1 mm, op til 1 m i spring af t . Først beregnes DN som er en fælles konstant i formlerne for k_2 og k_3 . Dernæst beregnes k_2 og k_3 hvor "prik-kommandoerne" angiver at vektorerne (med z_0) skal ganges eller divideres elementvis. Til sidst beregnes k_4 og resultatet skrives ud dels på skærmen og dels til en fil i png-formatet.

```
% Koblingsfaktorer
clear
format compact

d1=0.100;      % Ydre diameter (m).
d2=0.100;      % Indre diameter (m).
t =0.001;      % Ledningens tykkelse (m).

z0=t:t:1;      % Abscissens koordinater (m).

DN=sqrt(log(2*d1/t)*log(2*d2/t));
k2=sqrt(d2/d1)*log(sqrt(((d1+d2)^2+4*z0.^2)./((d1-d2+t)^2+4*z0.^2)))/DN;
k3=(pi/2)*sqrt((d2/d1)^3)./(DN*(2*z0/d1).^3);
k4=k2.*k3./(k2+k3);

loglog(z0,k2, z0,k3, z0,k4)
xlabel('Afstand mellem vindingerne, z_0 (m)')
ylabel('Koblingsfaktor')
legend('k2','k3','k4')
axis([0.001 1 0.001 1])
grid on

% Skriv resultatet til fil.
print -dpng /media/disk/Torean/artikel/FormlerForSpoler/MATLAB/printfile.png
```

Algoritme

I dette kapitel vises udledningen af algoritmer for to spoletyper. Den første er skivespolen, der kan bygges på et printkort idet spolen grundlæggende er af to dimensioner. Den anden er for en generel spole med både tykkelse af beviklingen, ligesom skivespolen, og dertil en længde.

Skivespole

Koblingsfaktoren mellem to vindinger r og s beskrives som k_{rs} hvor r er den indre og s den ydre af de to vindinger (se udledningen side 40).

$$k_{rs} = \frac{\frac{\pi-1}{2} \left(\frac{d_r-t}{d_s} \right)^2 - \left(\frac{d_r-t}{d_s} \right) + \ln \left(\frac{d_s}{d_s-d_r+t} \right)}{\sqrt{\ln \left(\frac{1,38 d_s}{t} \right) \ln \left(\frac{1,38 d_r}{t} \right)}} \sqrt{\frac{d_s}{d_r}}$$

Selvinduktionen af vinding x beregnes af formlen L_{x0} hvor udtrykket inkluderer selvinduktionen fra lederen selv og derfor primært sigter mod anvendelse ved lave frekvenser. For anvendelse ved højere frekvenser bør konstanten 1,38 erstattes med 1,07 som vist på side 34. Vindingerne har forskellige diameter, men trådtykkelsen antages konstant for hele spolen. For printkort kan man som en tilnærmelse benytte en trådtykkelse givet alene ved bredden af kobberbanen.

$$L_x = \frac{\mu_0 d_x}{2} \ln \left(\frac{1,38 d_x}{t} \right)$$

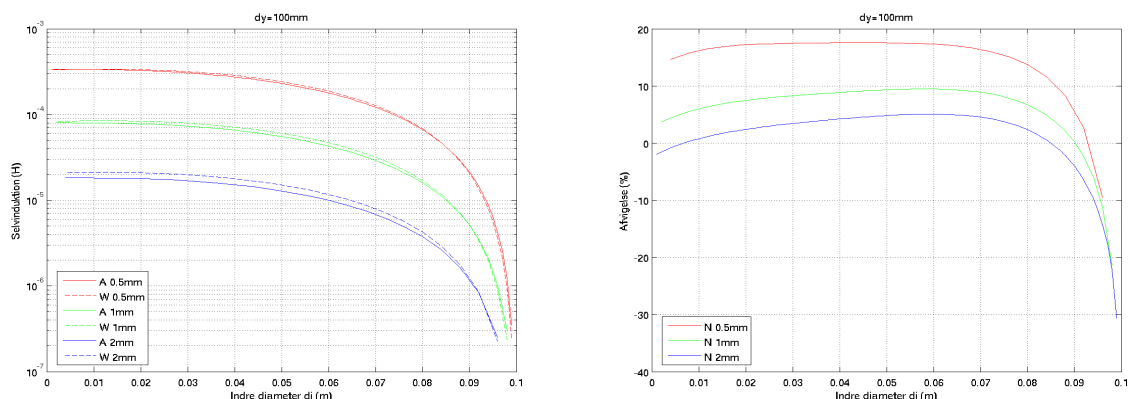
Diameteren af vinding x bestemmes som følger hvor d_i er den indre diameter målt fra centrum til centrum af den inderste vinding. Tykkelsen af beviklingen b er fra centrum af den inderste vinding til centrum af den yderste vinding og antallet af vindinger N er b/t nedrundet til et heltal. Den faktiske afstand mellem vindingerne er derfor givet ved spolens *pitch* p så b ikke formindskes.

$$d_x = d_i + 2(x-1)p, \quad x = \begin{pmatrix} n = 1, \dots, N \\ r = 1, \dots, N-1 \\ s = r+1, \dots, N \end{pmatrix}, \quad N = \text{heltal} \left(\frac{b}{t} \right) \Rightarrow p = \frac{b}{N}$$

Resultatet sammenlignes med Wheelers formel for en skivespole L_{WD} hvor ydre og indre diameter er henholdsvis d_y og d_i , den gennemsnitlige diameter er d , tykkelsen af beviklingen er b og der er N vindinger ved tæt bevikling. Spolens faktiske ydre diameter D_y , som måles med en skydelærer, er én trådtykkelse større end d_y med og tilsvarende for den faktiske indre diameter D_i af spolen.

$$L_{WD} = \frac{\pi}{4} \frac{10 \mu_0 N^2 d^2}{4d+11b}, \quad d = \frac{d_y+d_i}{2}, \quad b = \frac{d_y-d_i}{2}, \quad N = \frac{b}{t}, \quad D_y = d_y+t, \quad D_i = d_i-t$$

For en spole med ydre diameter $d_y = 100$ mm og næsten helt opfyldt bevikling ($d_i = 2$ mm) bliver spolens gennemsnitlige diameter $d = 51,0$ mm tykkelsen af beviklingen $b = 49,0$ mm, hvilket lever plads for $N = 49$ vindinger på spolen. Den beregnede selvinduktionen er $L = 80,0$ μH efter algoritmen for en trådtykkelse på $t = 1$ mm, hvilket er mindre end 4 % fra Wheelers formel, der giver en værdi på $L_{WD} = 83,0$ μH . Det generelle billede vises nedenfor med en fast ydre diameter på $d_y = 100$ mm, som funktion af den indre diameter med trådtykkelsen som parameter. Det bedste resultat opnås med relativ tyk tråd; omkring 2 % af ydre diameter virker optimalt, idet værdien ligger indenfor ± 5 % for en indre diameter op til 90% af den ydre. Med tyndere tråd vil Wheelers formel give et noget optimistisk bud på spolens selvinduktion.



Figur 27 – Til venstre en sammenligning mellem beregnet selvinduktion efter algoritmen (fuld streg) og Wheelers formel (stiplet streg) for tre tråddykkelser. Til højre vises afvigelsen fra Wheeler i procent i forhold til algoritmens beregning.

Konklusionen er at algoritmen giver et godt resultat overfor Wheelers formel for en tynd tråd og en indre diameter fra 0 til 80 % af den ydre diameter. Det aritmetiske gennemsnit af dette interval er en indre diameter omkring 40 % af den ydre diameter og det giver en enkel designregel.

$$d_i = 0,4d_y, \quad t = 0,02d_y \Rightarrow b = 0,3d_y \Rightarrow N = \frac{b}{t} = 15 \Rightarrow L = (450 \mu\text{H/m})d_y$$

Software:

Algoritmen beregner selvinduktionen af en skivespole hvor vindingerne ligger i spiralform med en ydre diameter d_y for en indre diameter fra 0 til 100 % af den ydre diameter og en tråddykkelse med tre diskrete værdier.

```
% SelvinduktionSkiveSpole02.m
clear
format compact
dy=0.100; % Diameter af yderste vinding (m).
disp(' ') % Blank linje.
my0=4*pi*1e-7; % Magnetisk konstant (H/m).
for tt=1:3 % Step igennem tråddykkelserne.
    switch tt
        case 1, t=0.0005; t1=t; % Tråddykkelse (m).
        case 2, t=0.001; t2=t;
        case 3, t=0.002; t3=t;
    end
    Nmax=fix(dy/(2*t)); % Størst mulige antal vindinger.
    disp(['t=' num2str(t) 'm Nmax=' num2str(Nmax) ':'])
    for q=1:Nmax-1 % Indre diameter fra 2t til dy-2t.
        di=q*dy/Nmax; % Indre diameter (m).
        x(tt,q)=di; % Vektor med abscisse-koordinaten.
        d=(dy+di)/2; % Gennemsnitlig diameter (m).
        b=(dy-di)/2; % Tykkelse af bevikling (m).
        N=round(b/t); % Antal vindinger.
        if N==0
            disp([' N=0 ved di=' num2str(di)])
            N=1;
        end
        p=b/N; % Afstand (pitch) mellem vindinger (m).
        M(tt,q)=N;
        % Wheelers formel.
        LW(tt,q)=(pi/4)*my0*N^2*d/(0.4+1.1*b/d);
        LW(tt,q+1)=NaN;
        % Selvinduktion efter algoritmen.
        L(tt,q)=0; % Klargør addition.
        for n=1:N % Summen af selvinduktion af alle vindinger.
            dn=di+2*(n-1)*p;
            L(tt,q)=L(tt,q)+my0*dn*log(1.38*dn/t)/2;
        end
    end
end
```

```

for r=1:N-1          % Summen af gensidig induktion for alle par.
    for s=r+1:N
        dr=di+2*(r-1)*p;
        ds=di+2*(s-1)*p;
        krs=( ((pi-1)/2)*(dr/ds-t/ds).^2-(dr/ds-t/ds)+ ...
            log(ds./(ds-dr+t)) ).*sqrt(ds./dr)./ ...
            sqrt(log(1.38*ds/t)*log(1.38*dr/t));
        L(tt,q)=L(tt,q)+krs*my0* ...
            sqrt(dr*log(1.38*dr/t)*ds*log(1.38*ds/t));
    end
end
if L(tt,q)==0        % Afvigelsen fra Wheeler til algoritme.
    disp([' q=' num2str(q) ' x = ' num2str(x(tt,q)) ...
        'm N = ' num2str(N)])
    E(tt,q)=NaN;
else
    E(tt,q)=100*(LW(tt,q)-L(tt,q))/L(tt,q);
end
L(tt,q+1)=NaN;      % Undertryk "flyback" linjer.
x(tt,q+1)=NaN;
M(tt,q+1)=NaN;
E(tt,q+1)=NaN;
if q==1
    disp([' di=' num2str(di) 'm d=' num2str(d) ...
        'm b=' num2str(b) 'm N=' num2str(N) ...
        ' L=' num2str(L(tt,q)) 'H'])
end
if q==fix(Nmax/2)
    disp([' di=' num2str(di) 'm d=' num2str(d) ...
        'm b=' num2str(b) 'm N=' num2str(N) ...
        ' L=' num2str(L(tt,q)) 'H'])
end
if q==Nmax-1
    disp([' di=' num2str(di) 'm d=' num2str(d) ...
        'm b=' num2str(b) 'm N=' num2str(N) ...
        ' L=' num2str(L(tt,q)) 'H'])
end
end
end
end

figure(1)
semilogy(x(1,:),L(1,:),'-r', x(1,:),LW(1,:),'--r', ...
    x(2,:),L(2,:),'-g', x(2,:),LW(2,:),'--g', ...
    x(3,:),L(3,:),'-b', x(3,:),LW(3,:),'--b')
grid on
title(['dy=' num2str(1000*dy) 'mm'])
xlabel('Indre diameter di (m)')
ylabel('Selvinduktion (H)')
legend(['A ' num2str(1000*t1) 'mm'], ['W ' num2str(1000*t1) 'mm'], ...
    ['A ' num2str(1000*t2) 'mm'], ['W ' num2str(1000*t2) 'mm'], ...
    ['A ' num2str(1000*t3) 'mm'], ['W ' num2str(1000*t3) 'mm'], ...
    'Location','SouthWest')
print -dpng /media/disk/Torean/artikel/FormlerForSpoler/MATLAB/printfile1.png

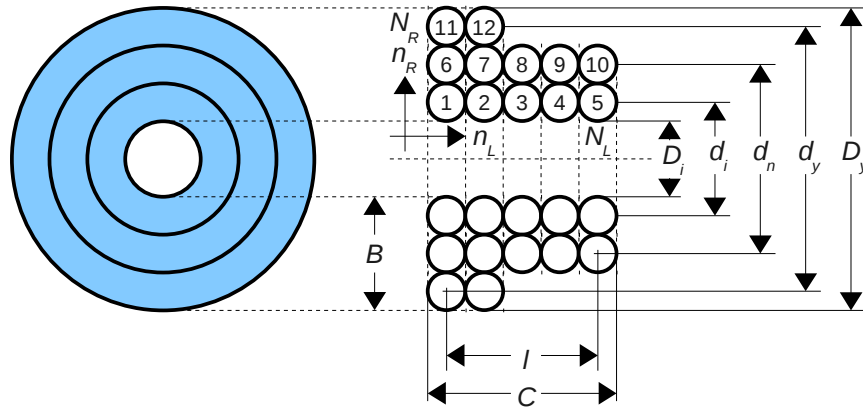
figure(2)
plot(x(1,:),E(1,:),'-r', x(2,:),E(2,:),'-g', x(3,:),E(3,:),'-b')
grid on
title(['dy=' num2str(1000*dy) 'mm'])
xlabel('Indre diameter di (m)')
ylabel('Afvigelse (%)')
legend(['N ' num2str(1000*t1) 'mm'], ['N ' num2str(1000*t2) 'mm'], ...
    ['N ' num2str(1000*t3) 'mm'],'Location','SouthWest')
print -dpng /media/disk/Torean/artikel/FormlerForSpoler/MATLAB/printfile2.png

figure(3)
plot(x(1,:),M(1,:),':ro', x(2,:),M(2,:),':go', x(3,:),M(3,:),':bo')
grid on
title(['dy=' num2str(1000*dy) 'mm'])
xlabel('Indre diameter di (m)')
ylabel('Antal vindinger')
legend(['W ' num2str(1000*t2) 'mm'], ['A ' num2str(1000*t3) 'mm'], ...
    ['W ' num2str(1000*t3) 'mm'],'Location','NorthEast')
print -dpng /media/disk/Torean/artikel/FormlerForSpoler/MATLAB/printfile3.png

```

Generel spole (under revision)

Algoritmen skal nu benyttes til at beregne selvinduktionen for en spole med både en længde og tykkelse af beviklingen. Spolen er beviklet med N_L vindinger i længderetningen og tykkelsen af beviklingen er givet ved N_R lag af vindinger langs radius. Det samlede antal vindinger er N .



Figur 28 – Spolen opbygges indefra med vinding 1 og fortsætter med N_L vindinger i hvert af N_R lag indtil sidste vinding, der i figuren er $N = 12$.

Spolens mål, der kan findes med en skydelære, er den ydre diameter D_y , den indre diameter D_i , tykkelsen af beviklingen B og den totale længde af spolen C . Disse størrelser benyttes ikke i beregningen, men en omsætning er vigtig. Den indre diameter er d_i , den ydre diameter er d_y og de er begge målt centrum til centrum af vindingen, trådtykkelsen er t og der er N_L vindinger i et enkelt lag, der er N_R lag og i alt N vindinger på hele spolen, der antages viklet tæt.

$$\begin{aligned} D_y &= d_y + t & d_y &= D_y - t \\ D_i &= d_i - t & d_i &= D_i + t \\ B &= \frac{D_y - D_i}{2} = N_R t & \Rightarrow & t = \frac{C}{N_L} \\ C &= l + t = N_L t \end{aligned}$$

Selvinduktionen af spolen beregnes ved hjælp af følgende algoritme, der er udviklet side Fejl: Henvisningskilde ikke fundet.

$$L_G = \sum_{n=1}^N L_n + 2 \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{s=r+1}^N k_{rs} \sqrt{L_r L_s}$$

Den enkelte vinding identificeres ved n der dækker området $n = 1 \dots N$ og selvinduktionen L_n af vinding n er givet ved dens diameter d_n og trådtykkelse t fra formlen L_{K1} :

$$L_n = \frac{\mu_0 d_n}{2} \ln\left(\frac{2,43 d_n}{t}\right)$$

Der indføres to variable hvor n_L angiver en vindingens afstand fra første vinding i længderetningen som antal trådtykkelser og n_R angiver en vindingens afstand fra første vinding i retning af radius.

$$\begin{aligned} n_R &= (n-1) \operatorname{div} N_L & \Rightarrow & d_n = d_i + 2 n_R t \\ n_L &= (n-1) \operatorname{mod} N_L & & l_n = n_L t \end{aligned}$$

Division af heltal benytter **div** for heltal delen og **mod** for heltal resten. Eksempelvis giver $11/5$ et heltal på to ($11 \operatorname{div} 5 = 2$) og en rest på én ($11 \operatorname{mod} 5 = 1$), hvilket svarer til at den sidste vinding i

spolen er forskudt to vindinger langs radius og én vinding langs længden af spolen.

Koblingsfaktoren k_{rs} beregnes ud fra en kombination af to formler. Formlen k_2 , er gyldig ved kort afstand mellem vindingerne, og formlen k_3 er gyldig i stor afstand (se side 47). Den resulterende funktion er ikke eksakt, men den udgør et kompromis mellem to funktioner der går imod det korrekte i ekstremerne.

$$k_{rs} = \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3}$$

Formlerne er under revision idet den beregnede selvinduktion er for højt.

Formlerne for k_2 og k_3 gengives herunder.

$$k_2 = \sqrt{\frac{d_2}{d_1}} \frac{\ln \sqrt{\frac{(d_1 + d_2)^2 + 4z_{rs}^2}{(t + d_1 - d_2)^2 + 4z_{rs}^2}}}{\sqrt{\ln\left(\frac{2d_1}{t}\right) \ln\left(\frac{2d_2}{t}\right)}} \quad \text{og} \quad k_3 = \frac{\pi}{2} \frac{\left(\frac{d_1}{2z_{rs}}\right)^3 \sqrt{\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^3}}{\sqrt{\ln\left(\frac{2d_1}{t}\right) \ln\left(\frac{2d_2}{t}\right)}}$$

Vindingernes diameter indsættes med d_1 som den største og d_2 som den mindste. Afstanden z_{rs} i længderetningen mellem vindingerne skal kun bruges kvadreret så fortegnet er irrelevant og det er strengt taget ikke nødvendigt med den numeriske værdi.

$$\begin{aligned} d_1 &= \max(d_r, d_s) \\ d_2 &= \min(d_r, d_s) \end{aligned} \quad \text{og} \quad z_{rs} = |l_r - l_s|$$

Afprøvning på spolerne fra eksemplerne:

Skivespole med tynd bevikling (side 9) benytter $d_i = 0,178$ m, $t = 0,5$ mm og $N = 4$. Den målte selvinduktion er $L_1 = 7,9$ μH og beregningen giver $L_1 = 10,5$ μH , der er 32 % for højt.

Kort cylinderspole (side 10) benytter $d_i = 0,032$ m, $t = 0,5$ mm og $N = 25$. Den målte selvinduktion er $L_2 = 24,35$ μH og beregningen giver $L_2 = 30,5$ μH , der er 25 % for højt.

Lang cylinderspole (side 11) benytter $d_i = 0,0109$ m, $t = 0,32$ mm og der er tre beviklinger med $N_{3A} = 50$, $N_{3B} = 150$ eller $N_{3C} = 200$, og de er målt til $L_{3A} = 17$ μH , $L_{3B} = 48$ μH eller $L_{3C} = 65$ μH . Beregningen giver $L_{3A} = 17,7$ μH , der er 4 % for højt, $L_{3B} = 62,6$ μH , der er 30 % for højt og endelig $L_{3C} = 85,3$ μH , der også er 30 % for højt.

REFERENCEFORMLER

Det var ønskeligt med en formel der kunne beregne spolens selvinduktion uanset dens geometri, men det er tilsyneladende kun muligt ved numeriske metoder der beregner spolens gensidige induktion beregnes for hver enkelt par af vindinger. Teoretisk korrekte formler findes der dog for spoler med visse begrænsninger i den geometriske udførelse og de gennemgås i dette afsnit.

Maxwells formel

Formlen for en spole med en enkelt vinding tilskrives Maxwell, og angiver at selvinduktion af en spole afhænger af dens diameter og trådens tykkelse. Det betyder at selvinduktion vokser over alle grænser for en tråddykkelse gående imod nul, men logaritmen vokser meget langsomt ved et stort argument, så det er ikke et forhold der i praksis bliver ret afdæmpet.

$$L_M = \frac{\mu_0 d}{2} \left[\ln\left(\frac{8d}{t}\right) - 1,75 \right]$$

En spole med diameteren $d = 100$ mm og tråddykkelsen $t = 1$ mm har selvinduktion $L = 310$ nH. Hvis trådens tykkelse nedsættes til $t = 0,1$ mm stiger selvinduktion med 47 % til $L = 455$ nH.

Talværdien 1,75 erstattes af 2 ved høje frekvenser på grund af strømfortrængning (se side 14), hvorved selvinduktion af spolen aftager med cirka 5 % (afhængig af forholdet d/t).

En oplagt omskrivning benytter reglen om subtraktion af logaritmer $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$, og dertil identiteten $1,75 = \ln(\exp(1,75))$, til at bringe tallet 1,75 ned i nævneren af logaritmens argument. Division af 8 med $\exp(1,75) = 5,75$ giver 1,3902. Den tilsvarende beregning med talværdien 2 vises som Maxwells formel ved høje frekvenser.

$$L_{MLF} = \frac{\mu_0 d}{2} \ln\left(\frac{1,39d}{t}\right) \quad \text{eller} \quad L_{MHF} = \frac{\mu_0 d}{2} \ln\left(\frac{1,08d}{t}\right)$$

Formlen giver 0,15 % større værdi end formelen for simpel spole (L_{K0} side 34) for $d/t = 100$.

Formlen er ikke udviklet for spoler med bevikling, men som det vises på side 9 kan det dog gøres med nogen forsigtighed ved at indføre N^2 som faktor til $\mu_0 d$, og med t som den samlede tykkelse af beviklingen.

Cylinderspolen

I 1879 lykkedes det for Lorents at finde en eksakt beskrivelse af selvinduktion for en spole med et enkelt lag af endelig længde. Nagaoka omsatte i 1900-tallet de elliptiske integraler til nogle håndterbare udtryk [6], som gengives her i artiklen med konstanterne afrundet til fire decimaler, så der skal ikke forventes bedre end $\pm 0,1$ %.

Tråden er dog erstattet af en uendelig tynd folie hvori strømmen løber (*current sheet*). Det gør det umuligt at realisere spolen i praksis, for selvom resultatet nok er teoretisk korrekt er det en tilnærmelse alene at bruge det på en fysisk realiserbar spole. Det vil kunne ses ved en kontrolmåling på spolen, men som vist i eksemplet på side 10 kan man ramme temmelig præcist.

$$L_S = k \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \quad \text{eller} \quad L_S = k \frac{\pi \mu_0 N^2 \pi d^2}{4 l}$$

Metoden benytter den almindelige formel for cylinderspolen (L_S) med en korrektion k tilføjet. Det er ideen at korrektionen dæmper formelen for cylinderspolen ned ved kort længde hvor den ikke er

korrekt. Korrektionen går derfor fra 0 ved uendelig korte spoler, hvor formelen går imod uendelig, og imod 1 for meget lange spoler, hvor formelen er korrekt.

For korte spoler ($l < d$) går værdien af k fra $k_0 = 0$ ved $l = 0$, til $k_0 = 0,688$ ved $l = d$.

$$k_0 = \frac{2}{\pi} \frac{l}{d} \left[\frac{[\ln(\frac{4d}{l}) - 0,5][1 + A(\frac{l}{d})^2 + B(\frac{l}{d})^4]}{1 + C(\frac{l}{d})^2} + D(\frac{l}{d})^2 + E(\frac{l}{d})^4 - F(\frac{l}{d})^6 \right]$$

$$A=0,3839, \quad B=0,0171, \quad C=0,2590, \quad D=0,0938, \quad E=0,0020, \quad F=0,0008$$

For lange spoler ($l > d$) går værdien af k fra $k_\infty = 0,688$ ved $l = d$, til $k_\infty = 1$ ved $l \rightarrow \infty$.

$$k_\infty = \frac{1 + A(\frac{d}{l})^2 + B(\frac{d}{l})^4}{1 + C(\frac{d}{l})^2} - \frac{4}{3\pi} \frac{d}{l}$$

Formlerne danner en reference for denne artikel for at vurdere hvor god en formel er for spoler med beviklingen liggende i et tyndt lag. Det er dog svært at relatere resultatet til en reel spole så man skal ikke stole blindt på resultatet. Forudsætningen for metoden er en cylinder af uendelig tynd folie hvor en reel spole vil have strømmen løbende i en leder med en vis tråddykkelse. For spoler med en bevikling i flere lag må tykkelsen af laget være lille i forhold til diameteren, men hvornår er lille, lille nok? Det spørgsmål søges besvaret i afsnittene om spoler med bevikling, men først skal formelen benyttes analytisk til at danne et par effektive formler for korte spoler.

Kort spole

Spoler med meget kort længde er karakteriseret ved $l/d \ll 1$ og tillader derved en simplificasjon ved at fjerne led af anden og højere orden fra k_0 , som derefter ganges på formelen for L_S .

$$L_{K1} = \frac{2}{\pi} \frac{l}{d} [\ln(\frac{4d}{l}) - 0,5] \frac{\pi}{4} \frac{\mu_0 d^2 N^2}{l} \Rightarrow L_{K1} = \frac{\mu_0 d N^2}{2} [\ln(\frac{4d}{l}) - 0,5]$$

De to led i den firkantede parentes kan samles ved at 0,5 skrives som $\ln(\exp(0,5)) = \ln(1,65)$, hvorefter reglen om subtraktion af logaritmer $\ln(x) - \ln(y) = \ln(x/y)$ flytter konstanten 1,65 ned i nævneren og endelig giver $4/1,65 = 2,43$ som faktor til d/l . Det resulterer i en god lille formel, der er indenfor $\pm 2\%$ for en længde op til en tredjedel af diameteren.

$$L_{K1} = \frac{\mu_0 d N^2}{2} \ln\left(\frac{2,43d}{l}\right), \quad l \leq 0,35d$$

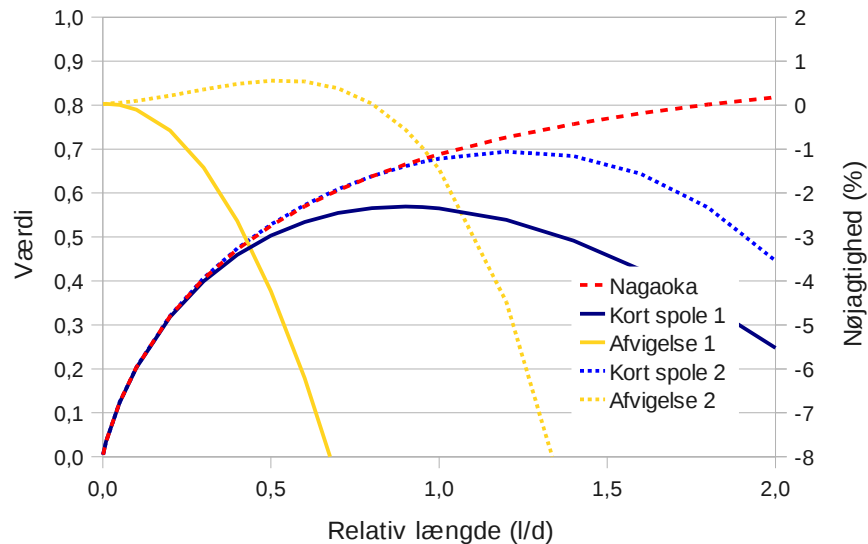
En forbedring af udtrykket medtager et af de efterfølgende led for korrektionen og da første led er på $1 + Ax^2$ var det naturligt at forsøge med et enkelt led med dette udseende. Efter lidt arbejde med at bestemme den optimale værdi af koefficienten blev resultatet som følger.

$$k_0 = \frac{2}{\pi} \frac{l}{d} \left(1 + 0,2\left(\frac{l}{d}\right)^2\right) \ln\left(\frac{2,43d}{l}\right)$$

Indsættes k_0 i udtrykket for den cylindriske spole L_S findes følgende formel der er indenfor $\pm 0,6\%$ op til $l/d = 0,9$ og $-1,5\%$ ved $l/d = 1$ (ved sammenligning med Lorentz og Nagaoka).

$$L_{K2} = \left[1 + 0,2 \left(\frac{l}{d} \right)^2 \right] \frac{\mu_0 d N^2}{2} \ln \left(\frac{2,43 d}{l} \right), \quad 0 \leq l \leq d$$

Resultatet ses nedenfor hvor den korrekte værdi af korrektionen efter Nagaoka ses med stiptet rød streg og den tilnærmede efter formelen ovenfor med blå streg og begge benytter ordinataksen til venstre. Afvigelsen fra det ideelle vises med gul streg og benytter ordinataksen til højre.

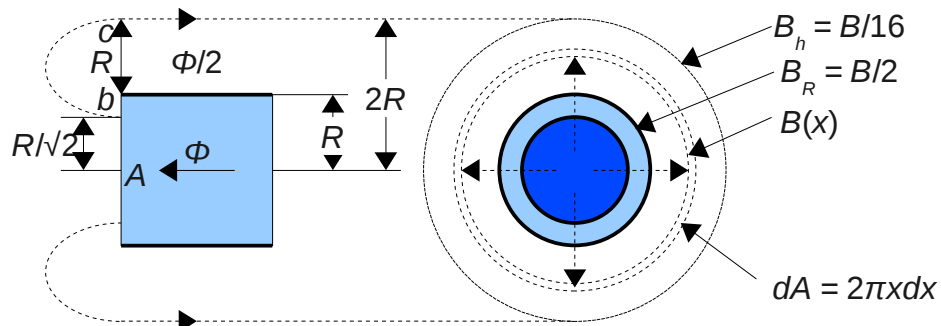


Figur 29 – Sammenligning mellem korrektionen med den teoretisk ideelle efter Lorentz og Nagaoka. De gule kurver refererer til den højre akse.

Normal spole

I dette afsnit gennemgås udviklingen af en stærkt forbedret formel for cylindriske spoler, der på engelsk kaldes for *solenoid coils*. Metoden er en udvidelse af den simple L_S formel hvor der nu tages hensyn til randfeltet. Der forsøges ikke udlede en eksakt teoretisk model, men derimod anvendes en række af "rimelige antagelser", som leder til et forbløffende nøjagtigt resultat.

Det er givet at den magnetiske flux Φ løber i lukkede baner omkring lederene med en værdi givet alene ved strømstyrken og spolens geometri. Set fra enden af spolen vil feltlinjerne forlade et område med arealet $A = \pi R^2$, hvor R er radius i spolen, så vi har $\Phi = BA$ for den magnetiske flux inden i spolen, idet den magnetiske fluxtæthed antages konstant over tværsnittet. Udenfor spolen spredes den magnetiske flux over et meget større areal så fluxtætheden aftager mod nul.



Figur 30 – Fluxtætheden falder stærkt med afstanden fra spolen så hovedparten af den magnetiske flux flyder i et relativt tyndt bånd langs med spolens yderside.

Den magnetiske fluxtæthed vil aftage fra værdien B_R ved randen af spolen, hvor $x = R$, og vil for

større afstand følge relationen $(R/x)^3$, som det vises i afsnittet side 28. Det skal bemærkes at udledningen af formlen forudsætter $x \gg R$, men det vil der ikke blive taget hensyn til her.

$$B(x) = \left(\frac{R}{x}\right)^3 B_R, \quad x \geq R$$

Den magnetiske fluxtæthed B_R er ikke kendt så den skal først fastlægges. Det benyttes her at den totale magnetiske flux udenfor spolen er den samme som inde i spolen. Den magnetiske fluxtæthed $B(x)$ er konstant over et lille arealelement dA i afstanden x fra centrum af spolen, så den magnetiske flux gennem arealelementet er $d\Phi = B(x)dA$, og arealelementet er $dA = xdxd\varphi$ i afstanden x og da integration rundt i en cirkel svarer til 2π gange radius kan arealelementet skrives som funktion af radius alene. Det giver den magnetiske flux gennem arealelementet.

$$d\Phi = B(x)dA, \quad dA = 2\pi xdx \Rightarrow d\Phi = 2\pi B_R \left(\frac{R}{x}\right)^3 xdx$$

Den totale magnetiske flux er $\Phi = B\pi R^2$ inde i spolen, og den er lig med den totale magnetiske flux udenfor spolen, som bestemmes ved at integrere $d\Phi$ fra spolens radius mod det uendelige. Herved kan den magnetiske fluxtæthed ved kanten af spolen B_R bestemmes til at være halvdelen af værdien B inden i spolen. Værdien er ikke kendt og kan først fastlægges på et senere tidspunkt i analysen, men indtil videre vil den blive betragtet som om den var en kendt størrelse.

$$\Phi = \int_R^\infty d\Phi = 2\pi B_R R^3 \int_R^\infty \frac{dx}{x^2} = 2\pi B_R R^3 \left[\frac{-1}{x} \right]_R^\infty = 2\pi B_R R^2 \Rightarrow B_R = \frac{\Phi}{2\pi R^2} = \frac{B}{2}$$

Dernæst beregnes tykkelsen af det bånd som hovedparten af den magnetiske flux løber igennem på gennem sin vej tilbage til den anden ende af spolen. Området udenfor spolen tænkes opdelt i to afsnit som skal dele den magnetiske flux i to lige store dele. Den ene del har 50 % i området fra R til en ukendt afstand h og de resterende 50 % i området fra h til det uendeligt fjerne.

For at bestemme afstanden h balanceres to integraler, som hver beregner den magnetiske flux fra henholdsvis R til h og fra h til uendelig. Integralerne er magen til det forrige integral blot med andre grænser. Faktor $2\pi B_R R^3$ er fælles for integralerne og kan divideres bort. Resultatet viser at afstanden er $h = 2R$ så halvdelen af den magnetiske flux løber i et bånd mellem R og $2R$, med resten af den magnetiske flux udenfor dette bånd.

$$\int_R^h \frac{dx}{x^2} = \int_h^\infty \frac{dx}{x^2} \Rightarrow -\frac{1}{h} + \frac{1}{R} = -0 + \frac{1}{h} \Rightarrow h = 2R$$

Relationen af tredje orden benyttes igen for den magnetiske fluxtæthed i afstanden $h = 2R$, hvor den magnetiske fluxtæthed vil antage en ottendedel af niveauet ved ydersiden af spolen, hvor det ovenfor var fundet til $B/2$. Den magnetiske fluxtæthed i afstanden h udenfor spolen vil derfor være aftaget til $B/16$.

$$B_h = \left(\frac{R}{h}\right)^3 B_R = \left(\frac{R}{2R}\right)^3 \frac{B}{2} = \frac{B}{16}$$

Arealet af båndet er givet ved en cirkel med radius $2R$ minus spolens areal, så den gennemsnitlige værdi af den magnetiske fluxtæthed indenfor båndet nærmest spolen bliver $B/6$.

$$A_h = \pi(2R)^2 - \pi R^2 = 3\pi R^2 \Rightarrow B_{50} = \frac{0,5\Phi}{A_h} = \frac{0,5B\pi R^2}{3\pi R^2} = \frac{B}{6}$$

Relationen $(R/x)^3$ gælder når spolens længde er lille i forhold til afstanden. Ved lange spoler spre-

des feltet så antagelsen om et smalt bånd i nærheden af spolen ikke længere holder. Feltet vil nå ud hvor den magnetiske fluxtæthed er svækket, og det påvirker beregningen af $B_{cd}l_{cd}$. Feltet antages at følge en halvcirkel med centrum ved spolens overflade og en diameter lig med spolens længde l_{cd} plus dens diameter d , hvilket giver en afstand på $r = l_{cd}/2 + R$, og dertil kommer vejen langs linjestykkerne $b-c$ og $d-a$, som begge antages at være kvarte cirkelbuer.

Produktet $B_{cd}l_{cd}$ for returvejen er givet af den magnetiske fluxtæthed B_{cd} langs med linjestykket og længden l_{cd} af linjestykket. Den magnetiske fluxtæthed i afstanden r fra spolens overflade er givet ved relationen af tredje orden med afstanden som $x = R + r$, og vejlængden er givet ved en halv cirkelbue med radius r så $l_{cd} = \pi r$. Produktet af de to udtryk er nul for en meget kort spole (på grund af faktor r) og igen for en meget lang spole (på grund af r^3 i nævneren). Funktionen vokser fra nul til et maksimum for derefter at aftage asymptotisk mod nul i det uendelige fjerne.

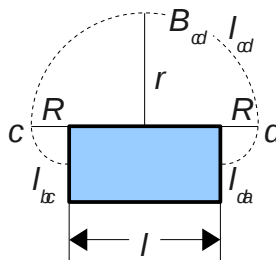
$$B_{cd} = B_R \left(\frac{R}{R+r} \right)^3, \quad l_{cd} = \pi r, \quad \Rightarrow \quad B_{cd} l_{cd} = B_R \left(\frac{R}{R+r} \right)^3 \pi r \quad \xrightarrow{r \rightarrow 0 \wedge r \rightarrow \infty} 0$$

Maksimalværdien er ved $r = R/2$ og værdien kan udtrykkes som 0,233 gange den magnetiske fluxtæthed inde i spolen B gange spolens radius R .

$$r = R/2: \quad B_{cd} l_{cd} = B_R \left(\frac{1}{1+0,5} \right)^3 \pi \frac{R}{2} = 0,456 B_R R = 0,233 BR \quad \Rightarrow \quad B_{cd} l_{cd} \leq 0,233 BR$$

De 50 % af den totale magnetiske flux, som løber tæt på ydersiden af spolens bevikling, vil inde i spolen også løbe tæt på beviklingen. Det kan benyttes til at finde en omtrentlig længde for de to buestykker l_{bc} og l_{da} i enderne af spolen. Værdien beregnes først for en spole helt uden længde ($l_{cd} = 0$) og værdien antages halveret for en lang spole hvor feltlinjerne løber som vist nedenfor.

Spolens tværsnit deles op i en indre del og en ydre del, der hver bærer 50 % af den magnetiske flux. De to dele må have samme areal på $A/2 = \pi R^2/2$ og det kræver at radius fra kernen er $R/\sqrt{2}$ og afstanden herfra til kanten af spolen er derfor $R - R/\sqrt{2} = 0,293R$. Det ydre bånd langs kurven $b-c$ beregnes som buelængden af en halvcirkel der strækker sig fra skillelinjen ved $0,293R$ indenfor spolens yderside til R udenfor spolen så diameteren er $1,293R$. Vejlængden langs halvcirklen er $\pi/2$ gange diameteren så den bliver $l_{bc} = (\pi/2)1,293R = 2,031R$ som den største afstand og længden er nul ved spolens kant, så den gennemsnitlige vejlængde ved enden af spolen beregnes som gennemsnittet til $l_{bc} = 1,015R$. Undervejs falder den magnetiske fluxtæthed fra B ved kanten til spolen, til $B_{50} = B/6$ ved den gennemsnitlige vej tilbage, og det vælges at benytte det geometriske gennemsnit (kvadratroden af B gange B_{50}) på $0,408B$.



Figur 31 – Beregning af vejlængden langs $c-d$ for magnetfeltet langs ydersiden af spolen.

Dermed giver integrationen langs randfeltet i hver ende af en meget kort spole:

$$B_h l_{bc} = B_h l_{da} = 1,015 \cdot 0,408 B R = 0,414 B R$$

Når spolens længde vokser vil vejlængden af feltlinjerne ved enderne aftage fordi tangenten til returvejen bliver mere skrå, og for en lang spole vil feltlinjerne kun gennemløbe en kvart cirkelbue i hver ende og ikke en halvbue. Det betyder at $B_{bc}l_{bc}$ og $B_{da}l_{da}$ begge aftager fra $0,414BR$ ved $l = 0$ til det halve når spolen er meget lang ($0,207BR$). Undervejs, ved en længde på $l = R/2 = d/4$, be-

nyttes i mangle af eksakt viden gennemsnittet af de to værdier, så $B_{bc}l_{bc} = B_{da}l_{da} = 0,311BR$. Som et resumé af analysen er der givet de følgende fikspunkter for Bl -produkterne:

Længde	Endestykker	Langs siden	Sum
$l=0$	$B_{bc}l_{bc} = B_{da}l_{da} = 0,414 BR$	$B_{cd}l_{cd} = 0$	$\sum Bl = 0,828 BR$
$l=d/4$	$B_{bc}l_{bc} = B_{da}l_{da} = 0,311 BR$	$B_{cd}l_{cd} = 0,233 BR$	$\sum Bl = 0,855 BR$
$l \rightarrow \infty$	$B_{bc}l_{bc} = B_{da}l_{da} = 0,207 BR$	$B_{cd}l_{cd} = 0$	$\sum Bl = 0,414 BR$

Den resulterende værdi for returvejen fra b tilbage til a er næsten konstant med længden fra nul til $d/4$ og det er rimeligt at forvente nogenlunde samme resultat for strækningen fra $d/4$ og et stykke op, idet værdien kun falder til cirka det halve ved det uendeligt fjerne. Summen kan derfor opfattes som konstant med en gennemsnitlig værdi på $0,842BR$ for relativt korte spoler.

Amperes lov har i forvejen bidraget Bl_{ab} fra integrationen langs spolens centerakse hvor den magnetiske fluxtæthed er B . Det er nu muligt at bestemme værdien af den magnetiske fluxtæthed i centrum af spolen og det vil blive udnyttet at spolens længde er $l = l_{ab}$.

$$\mu_0 N I = Bl + B_{ba}l_{ba} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{l + 0,841 R} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{l + 0,42 d}$$

Selvinduktionen bestemmes fra $L = N\Phi I = NBAI$, og det giver relationen for en "normal spole" med længden l og diameteren d .

$$L_N = \frac{\mu_0 N^2 A}{l + 0,42 d} \quad \text{eller} \quad L_N = \frac{\pi \mu_0 N^2 d^2}{4 l + 0,42 d}$$

Resultatet er indenfor $\pm 3,5\%$ for en længde på $l > 0,12d$. For spolen på side 10 giver formlen en værdi på $L_N = 24,9 \mu\text{H}$, der er $2,3\%$ for lav. Der er megen lighed med Wheelers formel, blot er konstanten til diameteren her $0,42$, hvor Wheelers formel benytter en konstant på $0,45$.

Wheelers formler

Den mest kendte formel for beregning af spolers selvinduktion er givetvis Wheelers formel, men andre formler eksisterer fra mesterens hånd og et par af dem omtales i det følgende. De er alle tilnærmede formler for estimering af spolers selvinduktion.

Cylinderspolen

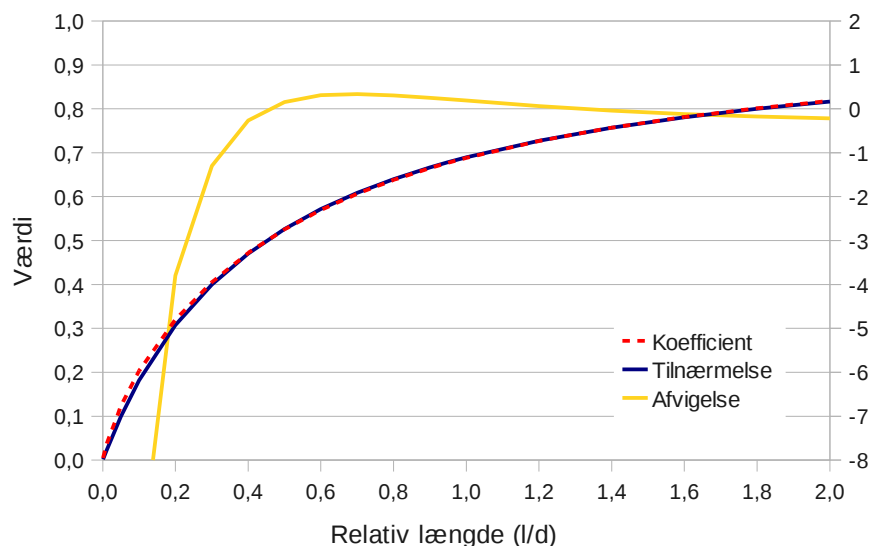
Formlen for L_S (side 23) går imod uendelig for længden gående mod nul så korrektionen skal gå mod nul for at kompensere og korrektionen skal dertil gå mod til én når længden vokser over alle grænser og formlen bliver asymptotisk korrekt. Wheelers formel for cylinderspolen er et elegant bud herpå med $\pm 0,33\%$ afvigelse for en spolelængde på $l \geq 0,4d$ hvilket svarer nogenlunde til en spolelængde større end radius.

$$k_w = \frac{l}{l + 0,45 d}, \quad \frac{l}{d} \geq 0,4$$

Korrektionen vises nedenfor som den blå streg med afvigelsen som gul streg. Indsættes korrektionen k_w i udtrykket for L_S findes den berømte Wheelers formel, der gengives herunder for en spole med cirkulært tværsnit; for et andet tværsnit kan $\pi d^2/4$ erstattes af arealet A . Ved division med diameteren i tæller og nævner bringes formlen på en form, der viser at spolens geometri repræsenteres af en parameter givet ved forholdet mellem længde og diameter.

$$L_w = \frac{\pi \mu_0 N^2 d^2}{4 l + 0,45 d} = \frac{\pi \mu_0 N^2 d}{4 (0,45 + l/d)}, \quad l \geq 0,4 d$$

At dømme efter referencer på internettet er dette selve *formlen* for beregning af spolers selvinduktion, og den benyttes tilsyneladende flittigt til spoler med flere lag tråd i beviklingen, ganske uanset eksistensen af formler der tager hensyn til beviklingens tykkelse.



Figur 32 – Sammenligning mellem korrektionen ved Wheelers formel med den teoretisk ideelle efter Lorentz og Nagaoka. Den gule kurve refererer til den højre akse.

Kært barn har mange navne og formelen findes i et hav af udgaver på internettet, som oftest i en simplificeret udgave hvor konstanterne er ganget sammen i et forsøg på at lette brugen. At dømme efter de mange fora med hjælp til beregning af spolers selvinduktion er det ikke den bedste fremgangsmåde, men da den er udbredt vises baggrunden for formlerne. Produktet af $\pi/4$ og den magnetiske konstant $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m giver resultatet $\pi^2 \cdot 10^{-7}$ H/m, og da π^2 kun er 1,3 % mindre end 10 kan konstanterne opfattes som en kompliceret måde at skrive $1 \mu\text{H}$ på.

$$L_{W(EU)} \approx \frac{N^2 d^2}{l + 0,45 d} \quad (L_{W(EU)} \text{ i mikrohenry for } d \text{ og } l \text{ i meter})$$

For en spole med længden $l = 12,7$ mm og diameteren $d = 25,4$ mm er $l/d = 0,5$ så Wheelers formel er korrekt indenfor $\pm 0,33$ % og med $N = 25$ vindinger bliver $L_w = 16,49 \mu\text{H}$. Den tilnærmede formel giver $L_{W(EU)} \approx 17,71 \mu\text{H}$ der er 1,3 % for højt på grund af tilnærmelsen $\pi^2 \approx 10$.

Formlen ses ofte gengivet i amerikanske hjemmesider som følgende udtryk hvor længde og radius indsættes i tommer (inch). Idet $1 \text{ m} = 39,4$ tommer, og da det er tæt på 40 tommer, vil formelen blive 40 gange større med diameteren indsat i tommer. Men da der benyttes radius, og $r^2 = d^2/4$, bliver der kun ganget med 10, og der kompenseres der for ved at dele i nævneren med 10.

$$L_{W(US)} = \frac{N^2 r^2}{9r + 10l} \quad (L_{W(US)} \text{ i mikrohenry for } d \text{ og } l \text{ i tommer})$$

For samme spole med $l = 0,5$ tomme og $r = d/2 = 0,5$ tomme beregnes $L_{W(US)} \approx 16,45 \mu\text{H}$, hvilket er 0,3 % under værdien fra Wheelers formel, så det er en rigtig god tilnærmelse.

Skivespolen

Spolen har beviklingen liggende som en spiral i et plan og Wheeler angiver følgende formel² [8-8] hvor N er antallet af vindinger, d er spolens gennemsnitlige diameter og b er tykkelsen af beviklingen, regnet fra centrum af den indre diameter d_i til centrum af den ydre diameter d_y . Det totale ydre mål bliver $d_y + 2t$ og den indre diameter (hullet i centrum af spolen) er på $d_i - 2t$. Hvis spolen vikles tæt vil N vindinger med trådtykkelsen t give en tykkelse af beviklingen på $b = Nt$, igen regnet centrum-til-centrum af tråden, så beviklingens totale tykkelse er $b + t$.

$$L_{ws} = \frac{\pi}{4} \frac{10 \mu_0 N^2 d^2}{4d + 11b}, \quad d = \frac{d_2 + d_1}{2}, \quad b = \frac{d_2 - d_1}{2} = Nt$$

Wheeler angiver et fejlniveau på 5 % ved tæt bevikling, men der rapporteres op til 20 % fejl ved brug af formlen når der er en stor afstand mellem lederene så spolen bør vikles tæt.

For en meget tynd bevikling ($b \approx 0$) er hele beviklingen koncentreret i spolens periferi og formlen reduceres til $L_{ws} = 1,96 \mu_0 d N^2$. Formlens resultat skal svare til formlen for kort spole L_{k1} og det kræver en trådtykkelse på $t = d/25$, hvilket svarer til 1 mm for en spole med 25 mm diameter.

Generel spole

En udvidelse af Wheelers formel for en spole med radius r , længde l og en bevikling med tykkelsen b . I amerikanske kilder gengives den som vist herunder, hvor selvinduktionen er i mikrohenry for dimensionerne i tommer. I dette dokument benyttes diameteren frem for radius og omsætning til metriske enheder klares ved at gange med 39,4 i tælleren idet der går 39,4 tommer på en meter. Formlen benytter en spoles areal på $\pi r^2 = \pi d^2/4$, så de tilhørende konstanter indføres og faktoren i tælleren justeres tilsvarende.

$$L_{WB} = \frac{0,8 r^2 N^2}{6r + 9l + 10b} \xrightarrow{d=2r} \frac{0,2 d^2 N^2}{3d + 9l + 10b} \xrightarrow{39,4 \text{ m/in}} \frac{7,874 d^2 N^2}{3d + 9l + 10b} \xrightarrow{A = \frac{\pi d^2}{4}} \frac{\pi}{4} \frac{10,02 d^2 N^2}{3d + 9l + 10b}$$

Endelig indføres den magnetiske konstant og faktoren i tælleren justeres tilsvarende (til 7,97 der afrundes til 10) så vi når frem til et udtryk, der er neutralt overfor det anvendte enhedssystem. Den gennemsnitlige diameter og tykkelsen af beviklingen beregnes som tidligere og spolens totallængde er trådtykkelsen større end spolelængden da der regnes fra centrum til centrum af beviklingen.

$$L_{WB} = \frac{\pi}{4} \frac{8 \mu_0 d^2 N^2}{3d + 9l + 10b}, \quad d = \frac{d_2 + d_1}{2}, \quad b = \frac{d_2 - d_1}{2} = Nt, \quad l = l_T - t$$

Formlen skal sammenlignes med Brooks coil. Med dimensionen $l = b = d/3$ indsat er de to formler mindre end 0,5 % fra hinanden.

$$L_{WB} = \frac{\pi}{4} \frac{8 \mu_0 d^2 N^2}{3d + 3d + 3,33d} = \frac{\pi}{4} \frac{8 \mu_0 d^2 N^2}{9,33d} = 0,673 \mu_0 d^2 N^2 \quad \text{hvor} \quad L_B = 0,676 \mu_0 d^2 N^2$$

For spoler med tynd bevikling bør formlen nærme sig Wheelers formel, hvor nøjagtigheden er kendt, men det gør den desværre ikke; formlen giver 11 % for lidt beregnet selvinduktion ved meget lange spoler; det er dog nok et problem de fleste kan leve fint med.

2 Referencen viser formlen som $31,33 \mu_0 N^2 r^2 / (8r + 11b)$ hvor r er radius. Brug af diameter erstatter $8r$ med $4d$ i nævneren og konstanten 31,33 deles med 4 på grund af kvadratet på radius ($r^2 = d^2/4$) til 7,83. Det er tæt på $10\pi/4 = 7,85$, og idet $\pi d^2/4$ er arealet af en cirkel, har Wheeler med stor sandsynlighed udtrykt formlen ved spolens areal og ikke ved radius.

$$b=0 \Rightarrow L_{WM} = \frac{\pi}{4} \frac{8 \mu_0 d^2 N^2}{3d+9l} = 0,889 \frac{\pi}{4} \frac{\mu_0 d^2 N^2}{0,333d+l} \quad \text{hvor} \quad L_w = \frac{\pi}{4} \frac{\mu_0 d^2 N^2}{0,45d+l}$$

Nær ved grænsen for den almindelige formel ($l = 0,4d$) er den beregnede værdi efter den modificerede formel 3 % for høj i sammenligning med Wheelers formel og det må egentlig regnes for et ganske godt resultat.

$$l=0,4d \Rightarrow L_{WM} = 0,889 \frac{\pi}{4} \frac{\mu_0 d^2 N^2}{0,333d+0,4d} = 0,952 \mu_0 d N^2 \quad \text{hvor} \quad L_w = 0,924 \mu_0 d^2 N^2$$

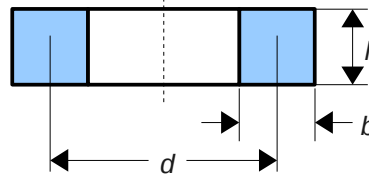
Ved helt korte og tynde spoler, hvor længde og tykkelse af beviklingen er givet af trådtykkelsen, bør formelen nærme sig de logaritmiske udtryk. Regnes trådtykkelsen for repræsenteret ved længden og benyttes forholdet $d/l = 100$ findes en fejl på -25 % så her må den modificerede formel siges at give op, men det gør den ikke-modificerede Wheelers formel også.

$$l=b=0,01 \Rightarrow L_{WM} = 0,889 \frac{\pi}{4} \frac{\mu_0 d^2 N^2}{0,335d} = 2,08 \mu_0 d N^2 \quad \text{hvor} \quad L_{KI} = 2,75 \mu_0 d N^2$$

Dette er ikke et bevis af formlens generelle gyldighed, men en analyse af hvordan den opfører sig i et par udvalgte situationer.

Brooks coil

I litteraturen mødes Brooks coil, der skal være nær idealet for hvor meget selvinduktion man kan få ud af en spole ved brug af mindst mulig kobber.



En spole med størst selvinduktion for mindst forbrug af tråd kaldes for "Brooks coil". Den har kvadratisk tværsnit af beviklingen og diameteren er tre gange siden i tværsnittet.

Spolens beviklingen har kvadratisk tværsnit med sidelængden $l = b$, og den indre diameter er to gange tykkelsen ($d_1 = 2b$) så den gennemsnitlige diameter bliver 3 gange tykkelsen ($d = 3b$). Dimensionerne er typiske for de spoler der eksempelvis findes i en højttalers defilte og selvinduktionen varierer kun lidt med geometrien så det er ikke livet om at ramme dimensionen helt præcist. Selvinduktionen er givet af nedenstående formel [8] der benytter spolens radius R . For brug her omregnes formelen til diameteren d .

$$L_B = 1,353 \mu_0 N^2 R$$

$$L_B = 0,676 \mu_0 N^2 d$$

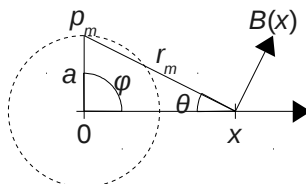
APPENDIKS

I dette kapitel gennemgås emner der er for tunge til den almindelige fremstilling.

Magnetisk fluxtæthed – Leder

Den elektriske leder har en vis tykkelse og strømmen løber ikke kun i centrum af lederen, som det er forudsat i de tidligere afsnit. I praksis løber strømmen enten i hele tværsnittet af lederen ved lave frekvenser eller i et tyndt lag ved overfladen af lederen ved høje frekvenser. Det har betydning for den magnetiske fluxtæthed inde i lederen, men en vigtig konklusion på analysen er at resultatet udenfor lederen uændret af strømmens profil inde i lederen, så i praksis kan man med god samvittighed antage at strømmen løber i et uendeligt tyndt bånd i midten af tråden.

På grund af symmetrien må centrum af lederen være feltfrit uanset om strømmen løber jævnt eller kun langs overfladen. Ved lave frekvenser er strømmen jævnt fordelt over lederens tværsnit, og den magnetiske fluxtæthed vokser lineært fra nul ved centrum til den værdi som B_1 angiver ved overfladen af lederen (se side 19). Ved høje frekvenser er strømmen henvist til at løbe i overfladen af lederen og her er hele den indre del af lederen uden magnetisk felt.



Figur 33 - Beregning af feltet indeni og udenfor en leder ved brug af Amperes lov. Modellen benytter et antal parallelle ledere og illustrationen benytter en leder p_m langs periferien.

Den magnetiske fluxtæthed kan beregnes ved hjælp af Amperes lov for en leder med radius a . Lederen opfattes som bestående af A parallelle ledere, der hver bærer $1/A$ af strømmen. Den magnetiske fluxtæthed fra hver af disse ledere er $\mu_0 I / 2\pi A r_m$, hvor r_m er afstanden fra leder nummer m til det punkt hvor den magnetiske fluxtæthed skal beregnes.

Den fysiske leder placeres med centrum i koordinatsystemets nulpunkt og hver af de A ledere vil blive placeret langs periferien af M koncentriske cirkler. For den inderste cirkel er radius a/M og der anbringes seks ledere med 60° indbyrdes afstand ($2\pi/6$) da det svarer til afstanden a/M mellem hver leder (der er netop seks korder i en cirkel). For den næste cirkel er radius $2a/M$, men afstanden mellem lederene er stadig a/M så denne cirkel rummer 12 ledere med 30° indbyrdes afstand ($2\pi/12$). Derefter kommer cirkel nummer tre med 18 ledere i 20° spring ($2\pi/18$) og så videre. Det samlede antal ledere for M koncentriske cirkler bliver [4-193, 5-108]:

$$A = 3M(M + 1), \quad M = 1, 2, 3, \dots$$

For leder nummer p er koordinaterne for lederen i punktet p_p givet ved ligningerne for punkter langs en cirkels periferi, og leddet $2\pi/12$ er indført for at undgå ledere langs med radius idet det giver division med nul når afstanden beregnes for punkter inde i selve lederen.

$$p_p = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a m}{M} \cos(\phi_p) \\ \frac{a m}{M} \sin(\phi_p) \end{pmatrix}, \quad \phi_p = \frac{2\pi m}{6M} + \frac{2\pi}{12}, \quad m = 0, 1, \dots, M-1$$

Punktet på x -aksen hvor den magnetiske fluxtæthed skal beregnes vil blive betegnet med x og

vektoren r_p fra p_p til $x = (x, 0)$ er givet ved vektorsubtraktion. Desuden bestemmes normalvektoren N_A der angiver retningen af feltet [4-79].

$$\vec{r}_p = \vec{p}_p = \vec{x} - \vec{p}_p = \begin{pmatrix} x - x_p \\ -y_p \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{N}_p = \begin{pmatrix} y_p \\ x - x_p \end{pmatrix}$$

Afstanden fra p_p til punktet betegnes r_p og beregnes ved Pythagoras [4-77]. Vinklen af $B(x)$ er θ_p og er angivet ved normalen til vektoren r_p . Cosinus til vinklen er givet af de trigonometriske forhold som hosstående side $(x - x_p)$ delt med hypotenusen (r_p).

$$r_p = \sqrt{(x - x_p)^2 + y_p^2} \quad \text{og} \quad \cos(\theta_p) = \frac{x - x_p}{r_p}$$

Den magnetiske fluxtæthed for hver enkelt af de A ledere opskrives direkte efter Amperes lov som feltet omkring en leder i afstanden r_p og den resulterende magnetiske fluxtæthed beregnes ved hjælp af princippet om superposition ved at addere dem alle. For hver af de M koncentriske cirkler er der $6M$ ledere og variable m og p benyttes til at tælle igennem alle lederne. Cirklerne tælles med m fra 1 til M og for hver cirkel løber p gennem de $6M$ ledere fra 0 til $6M - 1$.

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{2\pi M r_p} \Rightarrow B = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{6m-1} \frac{\mu_0 I}{2\pi M r_p}$$

Algoritmen er tilsvarende for den anden model hvor der kun benyttes ledere i den cirkel der repræsenterer overfladen af lederen. Her er radius fast på a og cirklen deles op i N ledere så hver enkelt leder bærer en N 'te del af den samlede strøm.

Koden i MATLAB vises nedenfor og en kort forklaring af notationen gengives kortfattet.

Afstanden fra centrum beskrives ved en x -vektor der går fra centrum og ud til afstanden 2 mm med spring på 0,01 mm som defineret ved den lidt kryptiske MATLAB kode `0:0.01e-3:2e-3`, der opretter en vektor med 201 elementer. Den nominelle magnetiske fluxtæthed beregnes BN og bliver ligeledes en vektor med 201 elementer. Divisionen benytter en "prik-operator" ved punktummet før divisionstegnet for at indikere at punkterne i BN skal beregnes for hver af punkterne i x . Division med nul undgås ved addition med eps , der er en forud defineret værdi. Den magnetiske fluxtæthed i punktet x beregnes i de to løkker ved $B1$, der ligeledes bliver en vektor med 201 elementer, og for modellen kun med strøm i overfladen af lederen er det $B2$ der benyttes. Til slut vises resultatet ved plot-operatoren, hvor der først plottes for $BN(x)$ med blå farve, dernæst $B1(x)$ med rød farve og endelig $B2(x)$ med grøn farve.

```
clear
format compact
x = 0:0.01e-3:2e-3; % Vektor for x-aksens punkter (m).
BN = (4*pi*1e-7)./(2*pi*x+eps); % Nominel feltstyrke (T).
a = 0.5e-3; % Radius af leder (m).

% Jævn fordeling af strømmen.
M = 100; % Antal cirkler i lederens tværsnit.
A = 3*M*(M+1); % Antal parallelle ledere.
B1 = 0;
for m=1:M % Step igennem antallet af cirkler.
    P = 2*pi/(6*m); % Faseinkrement for cirkel m (rad).
    for p=0:(6*m-1); % Step gennem punkterne på hver cirkel.
        xp = (a*m/M)*cos(p*P+P/2); % Koordinat x for leder m.
        yp = (a*m/M)*sin(p*P+P/2); % Koordinat y for leder m.
        rp = sqrt((x-xp).^2+yp^2)+eps; % Afstand til x for leder m.
        cosphi = (x-xp)./rp; % Afvigelse fra 90°.
        B1 = B1 + cosphi./(2*pi*rp); % Feltstyrke fra leder m,p
    end
end
B1 = B1 * (4*pi*1e-7)/A;

% Strøm i overfladen af lederen.
```

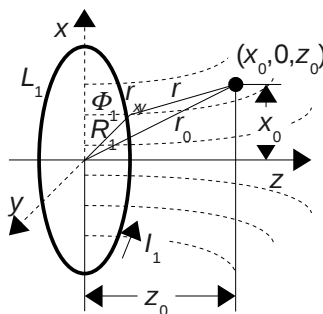
```

N = 1000; % Antal ledere langs overfladen.
B2 = 0;
P = 2*pi/N; % Faseinkrement for cirkel m (rad).
for p=0:(N-1); % Step gennem punkterne.
    xp = a*cos(p*P+P/2); % Koordinat x for leder m.
    yp = a*sin(p*P+P/2); % Koordinat y for leder m.
    rp = sqrt((x-xp).^2+yp^2)+eps; % Afstand til x for leder m.
    cosphi = (x-xp)./rp; % Afvigelse fra 90°.
    B2 = B2 + cosphi./(2*pi*rp); % Feltstyrke fra leder m,p
end
B2 = B2 * (4*pi*1e-7)/N;

% Plot resultatet.
plot(x,BN,'-b', x,B1,'-r', x,B2,'-g')
axis([0 2e-3 0 1e-3])
title(['Radius=',num2str(1000*a), 'mm'])
xlabel('Position x (m)')
ylabel('Magnetisk fluxtæthed (T)')
legend('Teoretisk værdi', 'Jævn strømfordeling', 'Overfladestrøm')
    
```

Magnetisk fluxtæthed – Spolens tværsnit

I den analytiske del er den magnetiske fluxtæthed beregnet i centrum af en spole ved hjælp af Biot og Savarts lov og udnyttelse af spolens symmetri. Der er behov for en generel bestemmelse af den magnetiske fluxtæthed i ethvert punkt i nærheden af spolen for at kunne bestemme koblingsfaktoren mellem to spoler i en vis indbyrdes afstand. Den bagved liggende matematik er ikke uoverkommelig og integralerne kan løses med kendt teknik, men arbejdet involverer elliptiske integraler hvis løsning er udenfor rækkevidde af artiklens forfatter, så en numerisk tilgang virker derfor som et attraktivt alternativ.



Figur 34 - Model af en spole for beregning af den magnetiske fluxtæthed i et vilkårligt punkt.

Den magnetiske fluxtæthed bestemmes i et punkt beskrevet ved vektor r_0 fra cirkelns centrum og til punktet $(x_0, 0, z_0)$ som vist ovenfor. Den valgte beskrivelse dækker ethvert punkt forskudt med x_0 fra centrum og i afstanden z_0 fra cirkelns plan. Det er uden praktisk betydning at y -koordinatet er sat til nul, for cirklen er upåvirket af en rotation i det plan den ligger i, så x_0 repræsenterer blot en afstand væk fra centrum.

Vektor r_0 angiver det punkt hvor den magnetiske fluxtæthed skal beregnes. Spolens periferi beskrives ved vektor r_{xy} fra cirkelns centrum til et punkt på periferien med radius R og en drejning θ , der løber fra 0 til 2π . På det punkt ved spolens periferi findes linjesegmentet dx . Vektoren fra linjesegmentet r_{xy} til det punkt hvor den magnetiske fluxtæthed skal beregnes (r_0) betegnes med r og beregnes som en vektordifferens [4-78]. Der er behov for orienteringen af linjesegmentet dx og da den følger med rundt langs spolens periferi vil den have samme retning som tangenten til cirklen og er derfor givet ved normalen til vektor r_{xy} [4-79].

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_{xy} = R \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \vec{r}_0 - \vec{r}_{xy} = \begin{pmatrix} x_0 - R \cos(\theta) \\ -R \sin(\theta) \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \vec{dx} = R d\theta \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Længden af afstandsvektoren r beregnes som kvadratroden af kvadratet på de enkelte led [4-77] og det udnyttes at $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

$$\begin{aligned} |\vec{r}| &= \sqrt{(x_0 - R \cos(\theta))^2 + (-R \sin(\theta))^2 + (z_0)^2} \Rightarrow \\ |\vec{r}| &= \sqrt{x_0^2 + R^2 \cos^2(\theta) - 2x_0 R \cos(\theta) + R^2 \sin^2(\theta) + z_0^2} \Rightarrow \\ |\vec{r}| &= \sqrt{R^2 + x_0^2 + z_0^2 - 2x_0 R \cos(\theta)} \end{aligned}$$

Krydsproduktet mellem vektorerne dx og r er krævet i udtrykket efter Biot og Savart og det findes til nedenstående resultat [4-78].

$$\vec{dx} \times \vec{r} = R d\theta \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0 - R \cos(\theta) \\ -R \sin(\theta) \\ z_0 \end{pmatrix} = R d\theta \begin{pmatrix} \cos(\theta) z_0 - 0 \\ 0 + \sin(\theta) z_0 \\ R \sin^2(\theta) - \cos(\theta)(x_0 - R \cos(\theta)) \end{pmatrix}$$

Parentesen for z-komponenten beregnes og det udnyttes at $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$.

$$\vec{dx} \times \vec{r} = R d\theta \begin{pmatrix} z_0 \cos(\theta) \\ z_0 \sin(\theta) \\ R \sin^2(\theta) - x_0 \cos(\theta) + R \cos^2(\theta) \end{pmatrix} = R d\theta \begin{pmatrix} z_0 \cos(\theta) \\ z_0 \sin(\theta) \\ R - x_0 \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

De to udtryk for henholdsvis z-komponenten af krydsproduktet og længden af vektoren r kan nu indsættes i Biot og Savarts formel. Resultatet er et udtryk for den magnetiske fluxtæthed i observationspunktet $(x_0, 0, z_0)$ med en ligning for hver af de tre akser.

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dx} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R d\theta}{(\sqrt{R^2 + x_0^2 + z_0^2 - 2x_0 R \cos(\theta)})^3} \begin{pmatrix} z_0 \cos(\theta) \\ z_0 \sin(\theta) \\ R - x_0 \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Den magnetiske fluxtæthed i punktet givet ved vektor r bestemmes ved integration over θ , der løber fra 0 til 2π . Ved en numerisk integration kan θ ikke gennemløbe alle værdier, så der benyttes N diskrete værdier θ_n , med $n = 0, \dots, N - 1$. Dermed er linjestykket dx ikke en uendelig kort del af spolens periferi, men har en længde på en brøkdel af omkredsen, så $dx = 2\pi R/N$. Den magnetiske fluxtæthed i punktet $(x_0, 0, z_0)$ beregnes derefter ved at addere bidragene fra de N linjesegmenter langs med cirkelns periferi.

$$B = \sum_{n=0}^{N-1} dB_n \quad \text{hvor} \quad dB_n = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R d\theta_n}{(\sqrt{R^2 + x_0^2 + z_0^2 - 2x_0 R \cos(\theta)})^3} \begin{pmatrix} z_0 \cos(\theta_n) \\ z_0 \sin(\theta_n) \\ R - x_0 \cos(\theta_n) \end{pmatrix}$$

Konstanten $\mu_0/4\pi$ ganges med $R d\theta_n = 2\pi R/N$ til $\mu_0 R I/2N$, som er en fast faktor til alle led og derfor kan sættes udenfor additionen. Vinklen mellem to punkter bliver $d\theta_n = 2\pi/N$, og det fastlægger længden af dx til $R d\theta_n$. Spolens periferi kommer til at bestå af N korte linjesegmenter og for passende stor værdi af N vil det komme til at ligne en cirkel. Den førromtalte forskydning er på $d\theta/2$ så beregningen ikke kommer til at dividere med nul selv ved $x_0 = R$ og $z_0 = 0$.

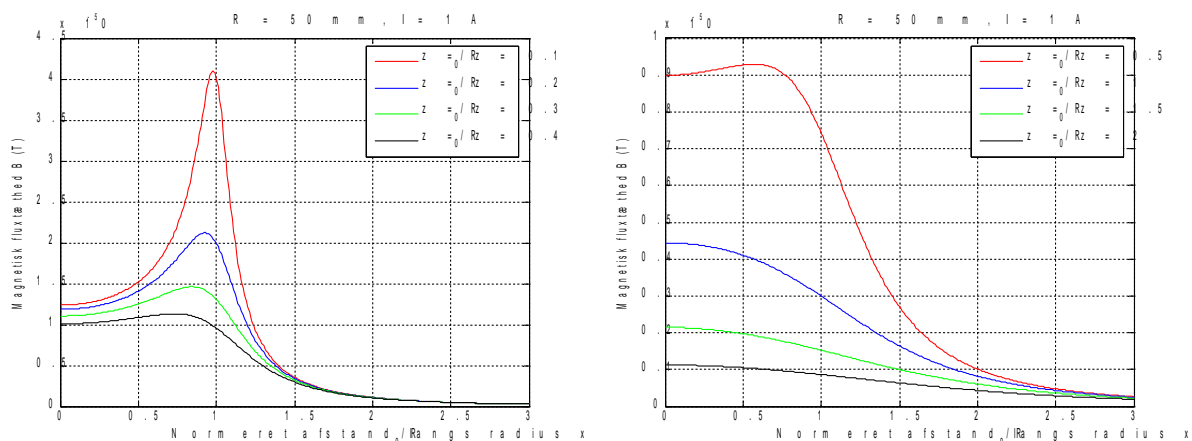
$$B = \frac{\mu_0 R I}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(\sqrt{R^2 + x_0^2 + z_0^2 - 2x_0 R \cos(\theta)})^3} \begin{pmatrix} z_0 \cos(\theta_n) \\ z_0 \sin(\theta_n) \\ R - x_0 \cos(\theta_n) \end{pmatrix}, \quad \theta_n = \frac{2\pi(n+0,5)}{N}$$

Denne algoritme benyttes i det følgende til beregning af vektorkomponenter af den magnetiske fluxtæthed og danner model for den efterfølgende analyse af feltet fra en skivespole. En analyse af algoritmens dimension vil vise at den bliver Hm^{-2}A . Integration over et areal giver en flux til HA og division med strømmen giver selvinduktionen til H.

Det er muligt at normere koordinaterne x_0 og z_0 efter radius, hvilket viser at feltets form er givet af ganske få parametre idet de nye variable x og z suverænt styrer variationen i de tre retninger, og radius er reduceret til at skalere den magnetiske fluxtæthed, men deltager ikke i beregningen på anden vis. Med andre ord, så opfører to spoler sig fuldstændigt ens med hensyn til hvordan den magnetiske fluxtæthed varierer, hvis alle afstande regnes som proportioner ud fra radius. Den numeriske integration beregner den magnetiske fluxtæthed for et punkt der ligger i afstanden z over spolens plan og i afstanden x fra centrum af spolen.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2RN} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(\sqrt{1+x^2+z^2-2x\cos(\theta_n)})^3} \begin{pmatrix} z \cos(\theta_n) \\ z \sin(\theta_n) \\ 1-x\cos(\theta_n) \end{pmatrix}, \quad \theta_n = \frac{2\pi n}{N}, \quad x = \frac{x_0}{R}, \quad z = \frac{z_0}{R}$$

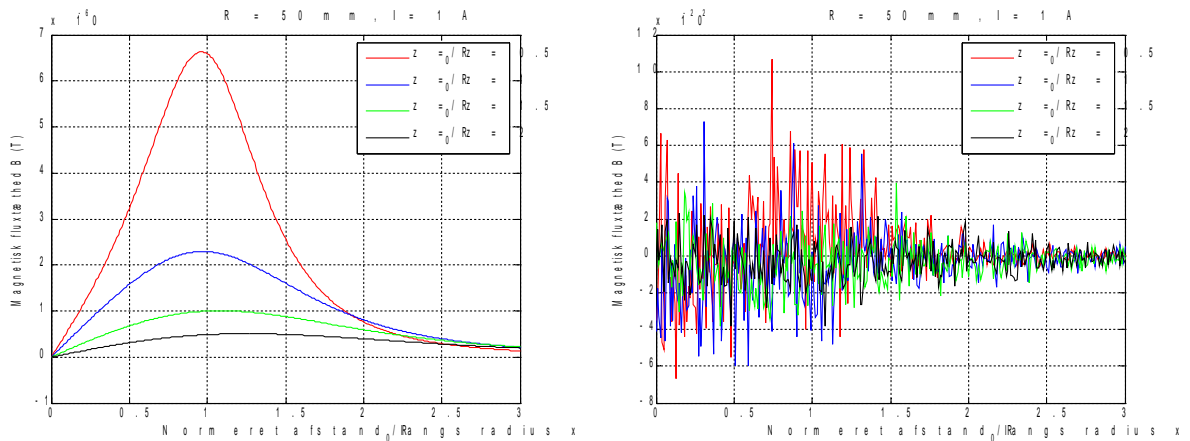
Resultatet vises nedenfor for den absolutte værdi af den magnetiske fluxtæthed (uanset dens retning) for i alt otte værdier af højden. Spolens periferi er opdelt i linjestykker svarende til spring af 3° ($N = 100$). Ved afstanden $z = 0$ vil fluxtætheden gå imod uendelig ved periferien ($x = 1$). Den værdi, der kommer nærmest, vises for $z = 0,1$ i den venstre figur (røde kurve). Den magnetiske fluxtæthed skal være $12,6 \mu\text{T}$ i centrum af spolen for $z = 0$ (side 28) og den røde kurve er tæt på. Den magnetiske fluxtæthed i centrum er samme sted bestemt til $4,44 \mu\text{T}$ for en højde på $z = 1$ (blå kurve i højre figur) hvilket også er tæt på.



Figur 35 - Den magnetiske fluxtæthed langs radius for en spole i otte forskellige højder over spolens plan angivet som styrken af feltet uanset feltretningen.

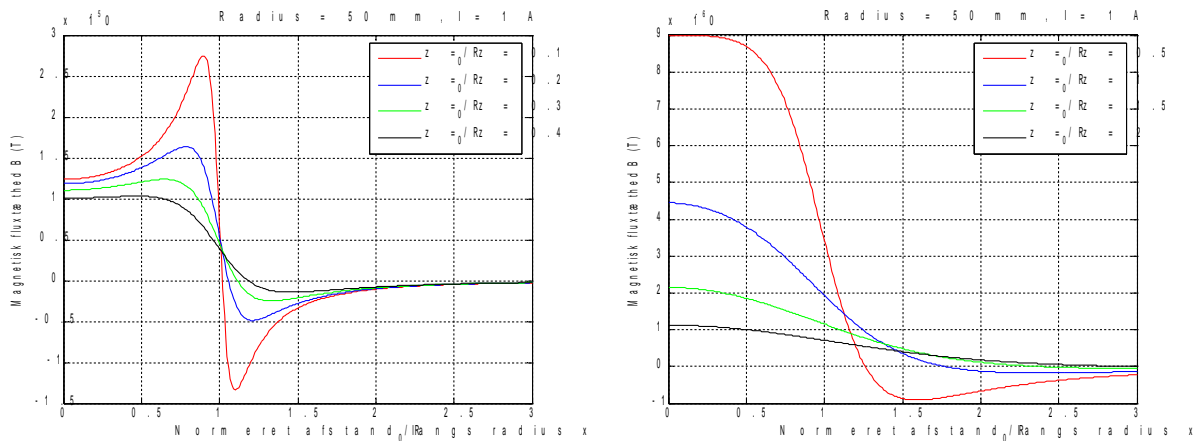
Det ses at for $z < R$ vil den magnetiske fluxtæthed stige over værdien i centrum når punktet er i nærheden af spolens periferi og for $z > R$ vil den magnetiske fluxtæthed aftage når punktet bevæges væk fra centrum. Det ses også at værdien i centrum kun ændres ganske lidt for en afstand over spolens plan på $z < R/10$, hvilket er på linje med resultatet fra side 28.

Til sammenligning viser figuren nedenfor feltet langs x-aksen (venstre) og y-aksen (højre); det vil sige i det plan spolen ligger. Den røde kurve til venstre ($z = 0,5$) er lidt mindre end den absolutte værdi fordi feltets retning skifter i nærheden af lederen fra at stå nogenlunde vinkelret på planet til at være mere i parallel med planet. I figuren til højre vises feltet i y-aksens retning, og som det ses er der tale om støj fra beregningen; feltretningen ligger i xz-planet og har ingen komponent i y-aksens retning, så værdien skal ideelt være nul (maksimum er $10 \cdot 10^{-21}$). Det er en konsekvens af forudsætningen om rotationssymmetri – feltet beregnes slet ikke i y-aksens retning.



Figur 36 - Den magnetiske fluxtæthed langs radius for en spole i fire forskellige højder over spolens plan vist for x-kordinaten (venstre) og y-kordinaten (højre). Feltets retning skifter ved spolens periferi og maksimum når lidt udenfor periferien på grund af spredningen.

Feltet langs z-aksen er af størst betydning for koblingen mellem to vindinger i en spole idet det er den eneste komponent der repræsenterer feltet som krydser ind igennem den anden spoles areal og derfor er udslagsgivende for den magnetiske flux igennem denne anden kreds. Figurene nedenfor viser forløbet af feltet langs med z-aksen i forskellige planer forskudt fra spolens plan.



Figur 37 - Den magnetiske fluxtæthed langs x med højden z over spolen som parameter. Til venstre er højden fra 0,1 til 0,4 gange radius, og feltets stigning nær ved lederen ses tydeligt for afstanden $x_0 = R/10$. Til højre er højden fra 0,5 til 2 gange radius, og feltets aftagen med afstanden er tydelig.

I kort afstand fra spolens periferi er feltstyrken stor og feltet skifter retning omkring $x = 1$, som det tydeligt ses for den røde kurve i den venstre figur. I større afstand er feltretningen positiv udenfor spolens periferi på grund af feltets spredning, som det ses af kurverne i den højre figur hvor der er et positivt bidrag indtil $x \approx 1,2$ passerer. Det ses også at feltets forløb er meget flad for $z = 0,5$.

Nedenfor gengives den benyttede software for beregning af kurverne. Den magnetiske fluxtæthed beregnes for alle tre akser og samles derefter i feltvektorens numeriske værdi. De næste linjer afgør hvad der skal skrives ud, og i den viste liste er de z-aksens komponent.

```
clear
% Parametre.
R = 0.050;      % Radius af primære spole (m).
N = 100;       % Antal punkter langs cirkelns periferi.
Z = 4;         % Skalering af z-komponenten (2 og 10).
x = 0:0.01:3;  % Relative koordinater langs med x-aksen.
for z=1:4
    Bx=0;
```

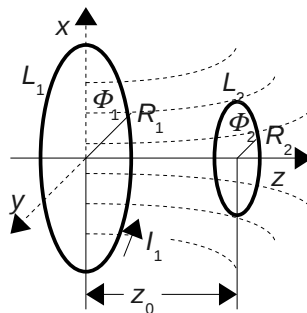
```

By=0;
Bz=0;
for n=0:N-1
    tn=2*pi*n/N;
    Bx=Bx+(z/Z)*cos(tn)/((sqrt(1+x.^2+(z/Z)^2-2*x*cos(tn))).^3);
    By=By+(z/Z)*sin(tn)/((sqrt(1+x.^2+(z/Z)^2-2*x*cos(tn))).^3);
    Bz=Bz+(1-x*cos(tn))/((sqrt(1+x.^2+(z/Z)^2-2*x*cos(tn))).^3);
end
Bx=Bx*(4*pi*1e-7)/(2*R*N);
By=By*(4*pi*1e-7)/(2*R*N);
Bz=Bz*(4*pi*1e-7)/(2*R*N);
B=sqrt(Bx.^2+By.^2+Bz.^2);
if (z==1) plot(x,Bz,'-r'); end
if (z==2) plot(x,Bz,'-b'); end
if (z==3) plot(x,Bz,'-g'); end
if (z==4) plot(x,Bz,'-k'); end
hold on
end
grid on
title(['R = ', num2str(1000*R), ' mm, I = 1 A'])
xlabel('Normeret afstand langs radius x = x_0/R')
ylabel('Magnetisk fluxtæthed B (T)')
legend(['z = z_0/R = ', num2str(1/Z)], ['z = z_0/R = ', num2str(2/Z)], ...
        ['z = z_0/R = ', num2str(3/Z)], ['z = z_0/R = ', num2str(4/Z)])
hold off

```

Magnetisk flux

Algoritmen fra det tidligere afsnit om beregning af den magnetiske fluxtæthed over spolens plan skal her benyttes som model for hvor meget flux, der overføres mellem to spoler, der er forskudt aksialt. I første tilfælde beregnes den magnetiske flux for to spoler med hver en enkelt vinding og derefter beregnes den magnetiske flux for to skivespoler med vindingerne liggende i samme plan. Det letter beregningen af den magnetiske flux fra en skivespole hvor vindingerne ligger som en spiral, idet der ikke skal tages hensyn til trådens tykkelse. To spoler defineres ved deres radier R_1 og R_2 samt afstanden z_0 imellem dem. Det forudsættes at der kun løber strøm i spole 1, så $I_1 = 1$ A og $I_2 = 0$, samt at spolerne ikke er vinklet i forhold til hinanden. Den magnetiske flux beregnes ved at integrere den magnetiske fluxtæthed over den aktuelle spoles areal.



Figur 38 - Model for beregning af den magnetiske flux der overføres mellem to spoler.

Den magnetiske fluxtæthed i z-aksens retning betegnes B_z og beregnes langs x-aksen og i højden z_0 over planet for spole 1 og rotationssymmetrien udnyttes til at lade dette repræsentere hele arealet. Komponenterne i xy-planet medtages ikke i beregningen idet de ikke kan give et feltbidrag gennem spolens plan. Den elektriske leder repræsenteres af N_p diskrete punkter langs med periferien af en cirkel hvis radius er R_1 og hvor vinklen θ_n er forskudt et halvt trin for at undgå en singularitet ved sammenfald mellem et punkt på periferien af spolen, det vil sige at division med nul for $x_0 = R_1$, $z_0 = 0$ og $\theta_n = 0$ ikke optræder fordi vinklen netop ikke bliver nul.

$$B_z = \frac{\mu_0 R_1 I_1}{2N_p} \sum_{n=0}^{N_p-1} \frac{R_1 - x_0 \cos(\theta_n)}{\left(\sqrt{R_1^2 + x_0^2 + z_0^2 - 2x_0 R_1 \cos(\theta_n)}\right)^3}, \quad \theta_n = \frac{2\pi(n+0,5)}{N_p}$$

Ved implementering af algoritmen er x_0 repræsenteret af en vektor hvor hver enkelt celle svarer til et trin med tråddykkelsen t (det er et valg og ikke den eneste mulighed). En position langs x-aksen er repræsenteret ved $x_0 = mt$, hvor m løber fra 0 ved spolens centrum og op til M_x ved til spolens periferi med $M_x = R_2/t$, idet beregningen kun angår den magnetiske fluxtæthed for spole 2.

Den magnetiske flux gennem spole 2 kaldes Φ_2 og beregnes ved at integrere B_z i afstanden z_0 over arealet for spolen. Integrationen af $B_z dA$ udføres over cirkulære bånd med radius x_0 ved numerisk integration.

$$\Phi_2 = \pi t^2 \left[0,5 B_0 + (M_x - 0,5) B_M + 2 \sum_{m=1}^{M_x-1} m B_m \right]$$

For den magnetiske flux gennem spole 1 benyttes $z_0 = 0$ i formlen for B_z samt $R_2 = R_1$.

Koblingsfaktoren k beregnes som vist på side 37 hvor den magnetiske flux fra spole 1 er givet af $\Phi_1 = LI$. Selvinduktionen beregnes af L_{K1} , for en spole med en enkelt vinding. Korrektionen med kvadratroden er tæt på 1 for de typiske vindinger i en spole, men bliver vigtigt for to vindinger med væsentligt forskellige radier.

$$k = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \sqrt{\frac{R_1 \ln(4 R_1/t)}{R_2 \ln(4 R_2/t)}} \quad \text{hvor} \quad \Phi_1 = \mu_0 I_1 R_1 \ln\left(\frac{4 R_1}{t}\right)$$

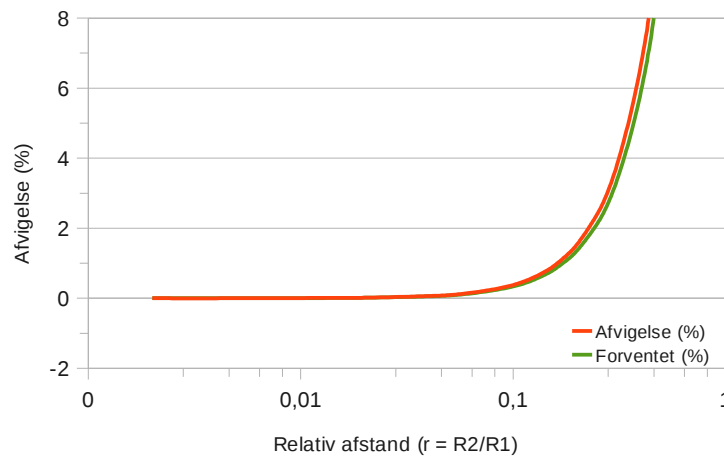
Algoritmen blev skrevet til MATLAB programmet *MagnetiskFlux.m* og blev benyttet for at bestemme koblingen mellem to spoler med variation i R_1 , R_2 , z_0 og t . Beregningen kontrolleres i det følgende imod resultaterne fra den analytiske del af artiklen.

Kontrol 1 – Samme plan. Den magnetiske flux kan beregnes for to spoler i samme plan hvis det forudsættes at spole 2 er væsentligt mindre end spole 1. Den magnetiske fluxtæthed B_z kan da antages konstant og den magnetiske flux bliver B_z gange med arealet af spolen med radius R_2 .

$$B_z = \frac{\mu_0 I_1}{2 R_1} \Rightarrow \Phi_1 = B_z \pi R_2^2$$

I spolens plan er $B_z = 12,6 \mu\text{T}$ for $R_1 = 50 \text{ mm}$ så fluxen bliver $\Phi = 987 \text{ pWb}$ for $R_2 = 5 \text{ mm}$, hvor algoritmen med 990 pWb ligger små $0,4 \%$ for højt.

Relationen vises nedenfor hvor algoritmens procentuelle afvigelse fra teorien vises med rød linje. Radius varieres fra det noget teoretiske $R_2 = 0,1 \text{ mm}$ til over 20 mm med en fast værdi af den ydre spole på $R_1 = 50 \text{ mm}$. Fejlen er lille for en relativ spoleradius $R_2/R_1 < 0,06$ svarende til at spole 2 skal være $R_2 < 3 \text{ mm}$, hvorover der er accelererende forskel mellem de to beregninger. Årsagen til denne forskel analyseres efterfølgende og vises som den grønne kurve.



Figur 39 - Afvigelsen mellem algoritmen og den teoretiske situation hvor den magnetiske fluxtæthed antages konstant over arealet af spolen (rød). Den forventede afvigelse på grund af Amperes lov (grøn).

Den magnetiske fluxtæthed er ikke konstant, men vokser fra værdien B_C i centrum af spolen til B_1 tæt ved lederen på grund af Amperes lov (se side 19 og Figur 40). Den magnetiske flux, som løber gennem spole 2, er derfor ikke kun afhængig af arealet af spolen, men også af den varierende magnetiske fluxtæthed hen over arealet af spole 1. For at give et bud på denne sammenhæng beskrives forholdet α mellem den magnetiske flux B_1 efter Ampers lov og den flux, som en konstant fluxtæthed på B_C ville afstedkomme. Den magnetiske flux B_1 antager at cirklen kan opfattes som en lang og lige leder, og det kan tillades tæt på lederen. Det er denne relation, der er benyttet for den grønne linje, vist som procentuel afvigelse, det vil sige at α er plottet som afvigelsen fra lille værdi af R_2 .

$$\alpha = \frac{\int_{Spole2} B_1 dA}{\int_{Spole2} B_C dA} = \frac{\int_{R_1-R_2}^{R_1+R_2} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} 2\pi R_2 dx}{\int_0^{R_2} \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} x dx} = \frac{\mu_0 I_1 R_2 \ln\left(\frac{R_1+R_2}{R_1-R_2}\right)}{\frac{\mu_0 I_1 R_2^2}{2R_1}} = 4 \frac{R_1}{R_2} \ln\left(\frac{R_1+R_2}{R_1-R_2}\right)$$

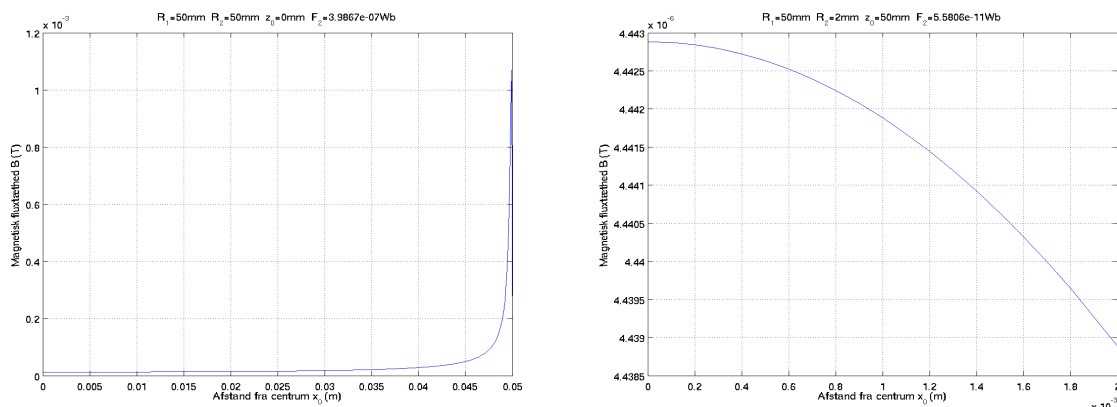
Det første led (tælleren) beregnes ved at integrere fra starten af den indre spole ($R_1 - R_2$) til den modsatte side af den indre spole en diameter væk ($R_1 + R_2$). Det anden led (nævneren) beregnes ved at integrere B_C fra spole 1 over arealet af spole 2. Resultatet vises som afvigelsen fra værdien i centrum (grøn linje) og ses at bekræfte hovedtrækkene i algoritmens afvigelse.

Kontrol 2 – Over planet. Fra afsnittet side 28 er den magnetiske fluxtæthed langs z-aksen for spole 1 givet ved strømmen I_1 , radius R_1 og højden z_0 . Den magnetiske flux gennem spole 2 findes som ovenfor ved produktet af den magnetiske fluxtæthed ved spolen og arealet af spolen, så det antages at den magnetiske fluxtæthed er konstant og lig med centerværdien. Resultatet kan kun forventes anvendeligt for $R_2 < 0,06R_1$ for en margin på $\pm 0,1\%$ eller $R_2 < 3$ mm.

$$B_z = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} \frac{1}{(\sqrt{1+(z_0/R_1)^2})^3} \Rightarrow \Phi_2 = B_z \pi R_2^2$$

For $I_1 = 1$ A, $R_1 = 50$ mm og $z_0 = 50$ mm er den magnetiske fluxtæthed $B_z = 4,443 \mu\text{T}$ i centrum af spolen og den magnetiske flux bliver $\Phi_2 = 55,83$ pWb for en spole med $R_2 = 2$ mm. Algoritmen giver værdien $\Phi_2 = 55,81$ pWb, der ligger 0,04 % under og dermed indenfor den forventede grænse.

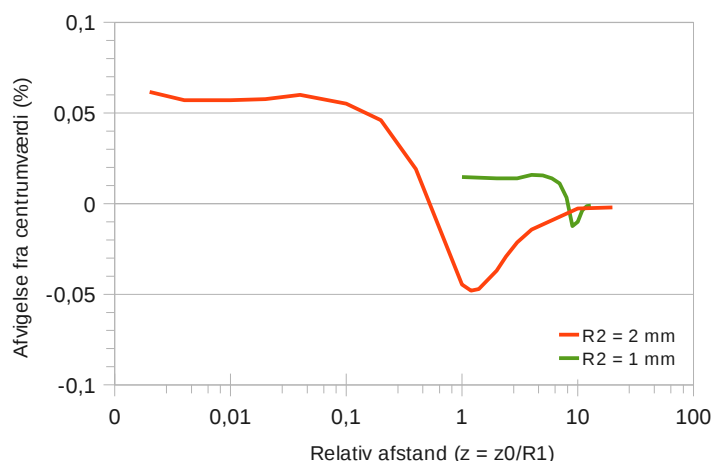
Som vist nedenfor (til højre) er variationen fra 4,443 μT ned til 4,439 μT , hvilket er under 0,1 % variation så den magnetiske fluxtæthed er nogenlunde konstant over spole 2.



Figur 40 – Kurve over den magnetiske fluxtæthed langs radius af spole 2 der ligger z_0 over spole 1. Til venstre er afstanden nul og spolerne har samme radier, til højre er $z_0 = 50$ mm og spole 2 har lille radius, og i begge tilfælde er $I_1 = 1$ A.

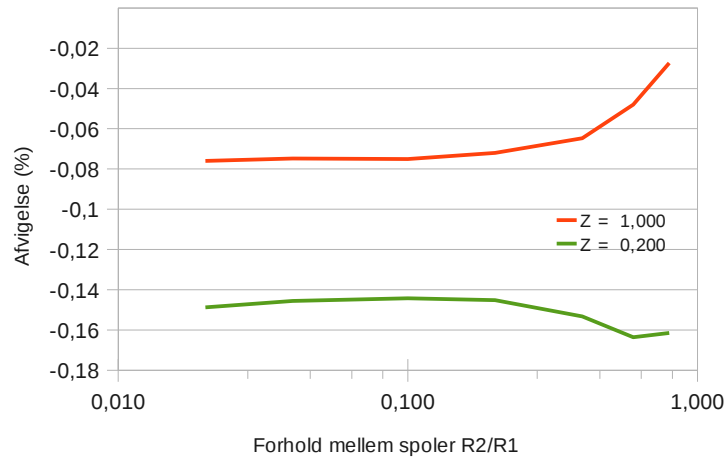
Resultatet ved forskellige værdier af afstanden z_0 mellem spolerne er vist for to radier af spole 2, og afvigelsen ligger indenfor det forventede område. Forløbet omkring $z = 1$ skyldes en ændring i z-komponenten for den magnetiske fluxtæthed (se Figur 37) og ved reduceret spoleradius ses fejlen at aftage som tegn på at den magnetiske fluxtæthed bliver mere konstant over arealet.

Beregningen benyttede en relativ afstand fra $z = 0,002$ til 20 svarende til afstanden $z_0 = 0,1$ mm over planet for spolen og op til 1 m fra spolen med en fejl indenfor $\pm 0,1$ %. Algoritmen må anses for at beregne korrekt.



Figur 41 - Afvigelsen fra det forventede ved $R_1 = 50$ mm. Faldet i afvigelse ved reduktion af R_2 er ikke en fejl ved algoritmen, men skyldes antagelse om konstant magnetisk fluxtæthed.

Kontrol 3 – Ombytning af spoler. Afsnittet om gensidig induktion viser at der ikke skal være nogen effekt af at bytte om på spolerne. Alle spoler blev beregnet med $R_1 = 50$ mm mens R_2 blev varieret for to værdier af z_0 som en referencesituation. Ved ombytning af R_1 og R_2 blev z_0 fastholdt. Resultatet vises nedenfor med de normerede værdier ($r = R_2/R_1$ og $z = z_0/R_1$) og viser at algoritmen tillader ombytning af spole 1 og 2 uden væsentlig påvirkning af resultatet. Størst nøjagtighed opnås med $R_1 > R_2$, hvilket kunne også forventes idet den magnetiske fluxtæthed omkring en lille spole er mere kompliceret end for en stor spole i samme absolutte afstand over spolens areal.



Figur 42 – Afvigelse som følge af ombytning af spolerne (reference $R_1 = 50$ mm og alternativt $R_2 = 50$ mm). Figurene er optegnet med $N_p = 100$ punkter langs cirkelens periferi og $M_x = 1000$ diskrete værdier langs med x-aksen og der var ikke nogen ændring i tallene ved brug af værdierne $N_p = 1000$ eller $M_x = 10000$.

Algoritmen vises nedenfor.

```
% MagnetiskFlux01.m
% Magnetisk flux koblet fra spole 1 til spole 2
format compact      % Fjern overflødige linjer i udskrift.
clear               % Slet gamle data.

R1=0.050;          % Radius af spole 1 (m).
R2=0.002;          % Radius af spole 2 (m).
z0=0.050;          % Afstand mellem spolerne (m).
t1=0.0001;         % Trådtykkelse i primære spole (m)
Mx=round(R2/t1);   % Antal punkter langs x-aksen.
Np=1000;           % Antal punkter langs cirkelens periferi.
x0=0:t1:Mx*t1;     % Vektor for x-aksen (m).

% Beregn Bz langs x-aksen for afstanden z0 (vektor med M+1 elementer).
Bz=zeros(1,Mx+1);
for n=0:Np-1
    tn=2*pi*(n+0.5)/Np;
    Bz=Bz+R1*(R1-x0*cos(tn))./(sqrt(R1^2+x0.^2+z0^2-2*x0*R1*cos(tn)).^3);
end
Bz=Bz*4*pi*1e-7/(2*Np);      % Strømmen er I=1A.

F2=0;
for m=1:Mx-1
    F2=F2+m*Bz(m+1);
end
F2=pi*t1^2*(0.5*Bz(1)+(Mx-0.5)*Bz(Mx+1)+2*F2);

% Skriv resultater:
disp(['R1=' num2str(R1) 'm R2=' num2str(R2) 'm t1=' num2str(t1) ...
      'm z0=' num2str(z0) 'm => F2=' num2str(F2) 'Wb'])

% Plot B-feltet som graf.
plot(x0,Bz, '-b');
grid on
title(['R_1=' num2str(1000*R1) 'mm R_2=' num2str(1000*R2) 'mm ' ...
      'z_0=' num2str(1000*z0) 'mm F_2=' num2str(F2) 'Wb'])
xlabel('Afstand fra centrum x_0 (m)')
ylabel('Magnetisk fluxtæthed B (T)')

% Skriv resultatet til fil.
print -dpng /media/disk/Torean/artikel/FormlerForSpoler/MATLAB/printfile.png
```

Sensitivitet

Formlerne på første side oplyses rask væk som værende indenfor en angiven tolerance hvis spolens længde opfylder visse krav overfor diameteren og hvis tråddykkelsen er meget lille, men en reel spole må nødvendigvis have en vis usikkerhed med hensyn til dens geometri. Det gælder både for måling på en selvlavet spole og hvis man planlægger en serieproduktion hvor der må forventes en spredning hen over produktionen. Man kan ikke måle ret meget bedre end $\pm 0,1$ mm med en skydelære, og selv om der findes bedre værktøjer vil spolen have en begrænset styrke overfor mekanisk belastning, så selve målingen kan deformere spolen og derved introducere en usikkerhed. Man kan dog forholdsvist let give et kvalificeret bud på hvor stor fejlen er.

Ved analyse af fejl benyttes størrelsen S_x , som angiver *sensitiviteten*, det vil sige følsomheden overfor variation i en parameter X . De parametre der er af interesse er spolens vindingstal, samt dens længde og diameter, så eksempelvis S_L angiver hvor meget selvinduktionen ændres som følge af en ændring i længden. Ændringen kan skyldes deformation ved målingen eller slet og ret en usikkerhed ved selve måling. Sensitiviteten har derfor en enhed – den angiver ændringen i selvinduktionen henry) som følge af en ændring i for eksempel længden (meter).

Her skal den relative ændring i selvinduktionen benyttes for at undgå relationen til faktiske størrelse af selvinduktionen og den parameter der påvirkes. Fordelen er at sensitiviteten derved angiver hvor mange procent selvinduktionen ændres ved en given procentvis ændring i den pågældende parameter. Ved en relativ ændring skal der normeres med både selvinduktionen og parameteren, og denne form for sensitivitet vil blive betegnet med s_x .

$$S_x = \frac{\partial L}{\partial X} \Rightarrow s_x = \frac{\frac{\partial L}{L}}{\frac{\partial X}{X}} = \frac{X}{L} \frac{\partial L}{\partial X} \approx \frac{X}{L} \frac{\Delta L}{\Delta X} \Rightarrow s_x \approx \frac{X}{L} \frac{L_2 - L_1}{X_2 - X_1}$$

Differentiationen $\partial L/\partial X$ kan selvfølgelig udføres, men mindre kan gøre det; man kan bestemme sensitiviteten ved at ændre parameteren X med ΔX (fra X_1 til X_2) og beregne ændringen ΔL i selvinduktionen (fra L_1 til L_2) og sensitiviteten er så givet ved beregningen yderst til højre. I denne artikel vil s_x blive bestemt analytisk, men det er muligt at indsætte talværdierne direkte i formlerne og beregne talværdierne for L_1 og L_2 .

Det er ikke helt så let at ramme det korrekte antal vindinger som man skulle tro. Der skal tælles med stor koncentration for spoler over 100 vindinger og der kommer let en tællefejl ind undervejs. Antallet af vindinger indgår kvadreret i alle formlerne så fejlen bliver ganske betydende, som følgende eksempel vi vise. Alle formler inkluderer $\mu_0 N^2$ samt en kombination af d og l , så de vil i fællesskab blive repræsenteret ved gN^2 , hvor g er en individuel størrelse. For den lange spole er den $g = (\pi/4)\mu_0 d^2/l$ så formlen for en lang spole bliver $L = gN^2$.

$$s_N = \frac{N_1}{L_1} \frac{L_2 - L_1}{N_2 - N_1} = \frac{N_1}{g N_1^2} \frac{g N_2^2 - g N_1^2}{N_2 - N_1} = \frac{1}{\frac{N_2}{N_1} - 1} \left[\left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 - 1 \right] \Rightarrow s_N = 2$$

For en ændring på 1 % bliver $N_2/N_1 = 1,01$ og værdien findes til $s_N = 2,01$. For 0,1 % ændring er $N_2/N_1 = 1,001$ og $s_N = 2,001$, så udtrykket går mod 2 for aftagende ændring, hvilket er helt i tråd med selve definitionen på differentiation.

Lang spole

Formeludtrykket bringes på en passende form.

$$L_w = \frac{\pi \mu_0 N^2 d^2}{4 l} \Rightarrow L = g d^2, \quad g = \frac{\pi \mu_0 N^2}{4 l} \quad \text{og} \quad L = \frac{h}{l}, \quad h = \frac{\pi}{4} \mu_0 N^2 d^2$$

Diameteren er kvadreret så sensitiviteten bliver 2, hvilket ses ved at indsætte værdier for d_2/d_1 , der er tæt på 1; for eksempel $d_2/d_1 = 1,01$ eller $d_2/d_1 = 0,999$.

$$s_d = \frac{d_1}{L} \frac{L_2 - L_1}{d_2 - d_1} = \frac{d_1}{g d_1^2} \frac{g d_2^2 - g d_1^2}{d_2 - d_1} = \frac{1}{\frac{d_2}{d_1} - 1} \left[\left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 - 1 \right] \Rightarrow s_d = 2$$

Længden er ikke kvadreret men står i nævneren så sensitiviteten bliver -1.

$$s_l = \frac{l_1}{L} \frac{L_2 - L_1}{l_2 - l_1} = \frac{l_1}{\frac{h}{l_1}} \frac{l_2 - l_1}{l_2 - l_1} = \frac{l_1^2}{l_2 - l_1} \left[\frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1} \right] = \frac{1}{\frac{l_2}{l_1} - 1} \left[\frac{l_1}{l_2} - 1 \right] \Rightarrow s_l = -1$$

Wheeler's formel

Denne formel indeholder en sum af længde og diameter i nævneren så de to parametre kan ikke behandles isoleret og det vil være hensigtsmæssigt at foretage differentiationen.

Diameteren indgår både i tæller og nævner, hvilket komplicerer udregningen. Først indsættes udtrykket for Wheeler's formel og de konstante led forkortes ud.

$$s_d = \frac{d}{L} \frac{\partial L}{\partial d} = \frac{d}{\frac{\pi \mu_0 N^2 d^2}{4 l + 0,45 d}} \frac{\partial}{\partial d} \left[\frac{\pi \mu_0 N^2 d^2}{4 l + 0,45 d} \right] = \frac{l + 0,45 d}{d} \frac{\partial}{\partial d} \frac{d^2}{l + 0,45 d}$$

Reglen for differentiation af en brøk benyttes (RW-137).

$$s_d = \frac{l + 0,45 d}{d} \left[\frac{\frac{\partial d^2}{\partial d} [l + 0,45 d] - d^2 \frac{\partial}{\partial d} [l + 0,45 d]}{(l + 0,45 d)^2} \right]$$

Udtrykket reduceres og sensitiviteten bliver $s_d = 2$ for lange spoler ($l \rightarrow \infty$) hvor diameteren i nævneren bliver uden betydning, mens værdien for de korte spoler reduceres til $s_d = 1$ for korte spoler ($l = 0$) hvor diameteren i nævneren er betydende.

$$s_d = \frac{l + 0,45 d}{d} \frac{2 d (l + 0,45 d) - d^2 0,45}{(l + 0,45 d)^2} = \frac{2 (l + 0,45 d) - 0,45 d}{l + 0,45 d} \Rightarrow$$

$$s_d = 2 - \frac{0,45 d}{l + 0,45 d}$$

For typiske spoler er: $s_d = 1,31$ for $l = 0,2d$, $s_d = 1,53$ for $l = 0,5d$ og $s_d = 1,69$ for $l = d$.

Længden indgår kun i nævneren, så beregningen bliver knapt så kompliceret og sensitiviteten bliver $s_d = -1$ for meget lange spoler og dæmpes ved korte spoler.

$$s_d = \frac{l}{L} \frac{\partial L}{\partial l} = \frac{l}{\frac{\pi \mu_0 N^2 d^2}{4(l+0,45d)}} \frac{\partial}{\partial l} \left[\frac{\pi \mu_0 N^2 d^2}{4(l+0,45d)} \right] = l(l+0,45d) \frac{\partial}{\partial l} \left[\frac{1}{l+0,45d} \right] \Rightarrow$$

$$s_d = l(l+0,45d) \frac{-1}{(l+0,45d)^2} \frac{\partial}{\partial l} (l+0,45d) \Rightarrow s_d = \frac{-l}{l+0,45d}$$

For typiske spoler er: $s_l = -0,31$ for $l = 0,2d$, $s_l = -0,53$ for $l = 0,5d$ og $s_l = -0,69$ for $l = d$.

Kort spole

Formlen for den korte spole benytter parameteren d/l til logaritmen, hvilket oprindeligt var et udtryk for tråddykkelsen (d/t) fra Maxwell formelen. For at vise den tredje metode til beregning af sensitivitet benyttes definitionen direkte.

Diameteren indgår to steder og den logaritmiske funktion begrænser muligheden for en effektiv reduktion, så ændringen i selvinduktionen beregnes stort set direkte fra udtrykket. Der er dog ikke grund til at gange med $\mu_0 N^2/2$ for den faktor er fælles i tæller og nævner. Efter en kort reduktion indsættes $d_2/d_1 = 1,01$ med længden fastholdt. Parameteren for diameter delt med længde beregnes som $d_2/l = 1,01d_1/l$.

$$s_d = \frac{d_1}{L_1} \frac{L_2 - L_1}{d_2 - d_1} = \frac{\frac{L_2}{d_2} - 1}{\frac{L_1}{d_1} - 1} = \frac{1}{\frac{d_2}{d_1} - 1} \left[\frac{d_2 \ln(2,43 \frac{d_2}{l})}{d_1 \ln(2,43 \frac{d_1}{l})} - 1 \right] = \frac{1}{\frac{d_2}{d_1} - 1} \left[\frac{d_2 \ln(2,43 \cdot 1,01 \frac{d_1}{l})}{d_1 \ln(2,43 \frac{d_1}{l})} - 1 \right]$$

For $l = 0,1d_1$ er $d_1/l = 10$ og $s_d = 1,31$, for $l = 0,2d_1$ er $d_1/l = 5$ og $s_d = 1,40$, og for $l = 0,5d_1$ er $d_1/l = 2$ og $s_d = 1,64$. Talværdien er større end 1, svarende til at diameteren i det logaritmiske udtryk trækker svagt i samme retning som diameteren foran logaritmen.

Længden indgår kun i det logaritmiske udtryk. Parameteren for diameter delt med længde beregnes som $d/l_2 = 1,01d/l_1$.

$$s_l = \frac{l_1}{L_1} \frac{L_2 - L_1}{l_2 - l_1} = \frac{\frac{L_2}{l_2} - 1}{\frac{L_1}{l_1} - 1} = \frac{1}{\frac{l_2}{l_1} - 1} \left[\frac{\ln(2,43 \frac{d}{l_2})}{\ln(2,43 \frac{d}{l_1})} - 1 \right] = \frac{1}{\frac{l_2}{l_1} - 1} \left[\frac{\ln(\frac{2,43 \cdot d}{1,01 \cdot l_1})}{\ln(2,43 \frac{d}{l_1})} - 1 \right]$$

For $l_1 = 0,1d$ er $d/l_1 = 10$ og $s_d = -0,31$, for $l = 0,2d_1$ er $d_1/l = 5$ og $s_d = -0,40$, og for $l = 0,5d_1$ er $d_1/l = 2$ og $s_d = -0,63$. Talværdien er større end 1, svarende til at diameteren i det logaritmiske udtryk trækker svagt i samme retning som diameteren foran logaritmen.

Udtrykkene benyttes i det indledende kapitel for estimering af fejlniveaueet.

REFERENCER

Referencer angives ved nummeret og sidetallet i kilden.

- 1 – Hans Ebert *Elektronik Ståbi*, 7. udgave, Teknisk Forlag, 1995.
- 2 – M. A. Bueno and A. K. T. Assis *A New Method for Inductance Calculations*, Journal of Physics D, 28:1802-1806, 1995. Artiklen er fundet med Google.
- 3 – M. A. Bueno and A. K. T. Assis *Self-Inductance of Solenoids, Bi-Dimensional Rings and Co-axial Cables*, *Helvetica Physics Acta* 70 (1997) 813-821. Artiklen er fundet med Google.
- 4 – Lennart Råde og Bertel Westergren *Mathematics Handbook for Science and Engineering*, Femte udgave, Studentlitteratur, 2004.
- 5 – Murray R. Spiegel *Mathematical Handbook of formulas and tables*, Schaum's outline series, 27th printing, 1991.
- 6 – <http://www.g3ynh.info/index.html>. David Knight gennemgår teorien bag design af spoler. Der er rigtig meget god information at hente, blandt andet...
- 7 – <http://www.g3ynh.info/zdocs/refs/Rosa1908/index.html> hvor Rosa gennemgår teorien.
- 8 – <http://www.thompsonrd.com/induct1.pdf> – og <http://www.thompsonrd.com/induct2.pdf> hvor Marc Thomson introducerer den elektromagnetiske teori og gennemgår designet af forskellige typer spoler, som fx todoiden og dertil cylindriske, plane, kvadratiske og spiralformede spoler.
- 9 – <http://www.ee.scu.edu/eefac/healy/indwire.html>. Tim Healy giver en introduktion til beregning af induktionen for en uendelig lang leder.
- 10 – <http://www.ece.umd.edu/class/enee380-1.F2005/lectures/lecture28.htm>. Beregningen vises for selvinduktion af to parallelle ledere.
- 11 – http://techdoc.kvindesland.no/radio/feed_lines/20060919164154813.pdf giver en introduktion til kerner af ferrit (OZ fra oktober 1995).
- 12 – <http://en.wikipedia.org/wiki/Inductor> hvor der er formler for spoler.